

РУКОВОДСТВО

для

УЧИТЕЛЕЙ И УЧИТЕЛЬНИЦЪ

КЪ ПРЕПОДАВАНІЮ

НАЧАЛЬНОЙ АРИѲМЕТИКИ

ВЪ

НАРОДНЫХЪ ШКОЛАХЪ.

СОСТАВИЛЪ

В. ЕВТУШЕВСКІЙ.

9-е изданіе, примѣненное ко всѣмъ изданіямъ первой части сборника задачъ, начиная съ 12-го, и второй, начиная съ 9-го изданія.

Цѣна 75 коп.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Паровая Скоропечатня М. М. Гутзацъ. Шпалерная, 26.
1905.

ПРЕДИСЛОВІЕ КЪ 3-му ИЗДАНІЮ.

Въ предлагаемомъ «Руководствѣ» я имѣлъ въ виду удовлетворить потребность большинства учителей и учительницъ, работающихъ въ начальныхъ школахъ, а также родителей, занимающихся начальнымъ обученіемъ своихъ дѣтей и не имѣющихъ достаточной педагогической подготовки, а потому нуждающихся въ практическомъ указателѣ для обученія дѣтей Ариѳметикѣ. Съ этою цѣлью я опустилъ изъ моей полной «Методики Ариѳметики» первыя три главы введенія и удержалъ только методику самаго курса, соотвѣтствующаго программѣ правильно устроенной народной школы. Въ самомъ курсѣ сдѣланы значительныя измѣненія, сравнительно съ изложеніемъ его въ Методикѣ. Всѣ указанія касательно пріемовъ рѣшенія устныхъ и письменныхъ задачъ, упражненій въ быстромъ вычисленіи и касательно употребленія наглядныхъ пособій, даны въ самомъ курсѣ въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ.

Въ этомъ третьемъ изданіи Руководство снова подверглось нѣкоторому измѣненію, согласно измѣненіямъ и дополненіямъ, сдѣланнымъ въ 12-мъ изданіи первой части моего Сборника ариѳметическихъ задачъ и въ 9-мъ изданіи второй части. Перемѣны и дополненія, сдѣланныя въ Сборникѣ ариѳметическихъ задачъ, указаны въ предисловіяхъ при каждой части Сборника; что-же касается перемѣнъ въ Руководствѣ, то онѣ главнѣйшимъ образомъ состоятъ въ слѣдующемъ:

1) Исправлена редакція почти всѣхъ задачъ, приводимыхъ для образца въ Руководствѣ.

2) При каждомъ отдѣлѣ упражненій, разъясняемыхъ въ Руководствѣ, указаны подъ нумерами всѣ задачи и численные примѣры, относящіеся къ этому отдѣлу въ моемъ Сборникѣ ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ.

В. Евтушевскій.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Элементарный курсъ простыхъ дробей.

ВВЕДЕНІЕ.

Курсъ Ариѳметики, проходимый въ начальныхъ школахъ, долженъ имѣть въ виду двѣ цѣли—теоретическую и практическую, то есть развитіе умственныхъ способностей дѣтей и сообщеніе имъ практическихъ знаній, необходимыхъ въ житейской обстановкѣ каждаго человѣка. Учебнымъ матеріаломъ этого курса должно быть: 1) изученіе чиселъ первой сотни и выводъ понятія о дѣйствіяхъ съ числами въ этомъ предѣлѣ; 2) нумерація и дѣйствія съ числами любой величины и 3) элементарный курсъ дробей. Учебный предметъ имѣетъ тогда благотворное вліяніе на развитіе умственныхъ способностей учащихся, когда онъ основательно усвоивается учащимися, когда онъ сознательно закрѣпляется въ ихъ памяти. Для основательнаго усвоенія учебнаго предмета во всѣхъ его подробностяхъ необходимо возможно частое повтореніе одного и того же учебнаго матеріала въ различныхъ видахъ и въ соединеніи съ новымъ матеріаломъ. Тогда старый матеріалъ все прочнѣе и прочнѣе залегаетъ въ памяти учащихся, а новый легко связывается со старымъ и незамѣтно, мало-по-малу, увеличиваетъ объемъ познаній учащагося. Такой ходъ развитія учащихся и накопленія у нихъ практическихъ полезныхъ знаній обусловливается расположеніемъ учебнаго курса. Исходя изъ самой сущности предмета, составляющій центръ учебнаго матеріала, нужно расположить этотъ матеріалъ по постепенно расширяющимся кругамъ, представляющимъ по содержанію цѣлые, законченные и однородные курсы, различающіеся между собою возрастаніемъ объема и усложненіемъ матеріала. Каждый предшествующій курсъ служитъ такимъ образомъ подготовкой для курса послѣдующаго, а послѣдующій—повтореніемъ и распространеніемъ предшествовавшаго.

Центръ учебнаго матеріала Ариѳметики есть *изученіе состава и свойствъ числа и дѣйствій съ числомъ.* Учебный матеріалъ началь-

наго курса Ариѳметики располагается въ слѣдующихъ кругахъ: 1) изученіе чиселъ отъ 1 до 10, при чемъ числа эти разсматриваются по ихъ составу, взаимнымъ отношеніямъ и дѣйствіямъ; 2) изученіе чиселъ до 20—этотъ курсъ есть только расширеніе перваго; 3) изученіе чиселъ до 100—этотъ курсъ представляетъ пополненіе и расширеніе прежнихъ и сводитъ въ опредѣленный научный порядокъ различныя соотношенія и взаимную связь чиселъ посредствомъ выдѣленія и группировки дѣйствій; 4) составныя именованныя числа въ предѣлѣ числа до 100 — этотъ курсъ представляетъ матеріалъ для примѣненія и обобщенія первыхъ трехъ и вводитъ установленіе самыхъ пріемовъ совершенія дѣйствій съ числомъ; 5) цѣлыя числа любой величины—курсъ, отличающійся отъ прежнихъ возрастаніемъ числа и требующій окончательнаго установленія механическихъ правилъ и пріемовъ для письменнаго вычисленія съ большими числами и 6) элементарный курсъ дробей, въ которомъ на основаніи всего пройденнаго устанавливается понятіе о дроби и ея свойствахъ и производятся четыре дѣйствія съ дробями не по механическимъ правиламъ, а на основаніи знанія учащимися свойствъ дроби и сущности самаго дѣйствія.

Въ виду достиженія преимущественно второй цѣли преподаванія Ариѳметики—пріобрѣтенія учащимися необходимыхъ практическихъ знаній—прохожденіе начальнаго курса Ариѳметики должно происходить при значительномъ участіи устныхъ и письменныхъ практическихъ задачъ и при частомъ упражненіи учащихся въ быстромъ вычисленіи.

Изложивъ вкратцѣ содержаніе и расположеніе учебнаго матеріала Ариѳметики въ начальной школѣ, располагающей тремя или четырьмя учебными годами, въ возрастѣ дѣтей отъ 7 до 10-ти, 12-ти лѣтъ, я не излагаю здѣсь ни разъясненій этихъ курсовъ, ни упражненій, необходимыхъ при ихъ прохожденіи. Все это учащіе найдутъ въ самомъ курсѣ, излагаемомъ ниже. Здѣсь же считаю умѣстнымъ привести основныя методическія положенія, знакомство съ которыми необходимо для всѣхъ, обучающихъ дѣтей въ начальныхъ школахъ.

1) *Въ началѣ обученія дѣтей Ариѳметикѣ слѣдуетъ давать предпочтеніе вычисленію устному, а впослѣдствіи письменному.* Устное вычисленіе иногда въ учебникахъ Ариѳметики и въ методическихъ руководствахъ называется *умственнымъ* и противопоставляется вычисленію письменному посредствомъ цифръ и при помощи опредѣленныхъ правилъ. При правильномъ обученіи дѣтей, какъ вычисленіе устное, такъ и письменное должны быть вычисленіями умственными; правило, прилагаемое учащимися при письменномъ рѣшеніи задачъ, и пріемы вычисленія требуютъ отъ учащихся такого же соображенія, какъ и пріемы вычисленія

устнаго. Притомъ не всякое устное вычисленіе бываетъ непремѣнно умственное; весьма часто встрѣчаются дѣти, вычисляющія устно посредствомъ цифръ, такъ же точно, какъ и при вычисленіи письменномъ; умножая, напримѣръ, 15 на 6, они точно также думаютъ про-себя: „пятью шесть тридцать; нуль пишу, а 3 въ умѣ“ и т. д., какъ это они дѣлаютъ и при вычисленіяхъ на бумагѣ или на доскѣ. Начинающему обучать дѣтей Ариѳметикѣ нужно обратить серьезное вниманіе на то, чтобы они при вычисленіяхъ устныхъ имѣли въ виду дѣйствительныя числа, а не значки, ихъ изображающіе. Раннее пріученіе дѣтей къ значку много затрудняетъ впослѣдствіе пониманіе сущности числа, его состава и соотношеній съ другими числами. По мѣрѣ возрастанія числа и усложненія упражненій съ числомъ становится труднымъ производить всѣ вычисленія устно, является необходимость въ нѣкоторыхъ обозначеніяхъ и пріемахъ, упрощающихъ запоминаніе связи между числами и вычисленія съ ними. Тогда уже и письменное вычисленіе, сознательно совершаемое, имѣетъ такое-же вліяніе на развитіе умственныхъ способностей учащихся, какъ и вычисленіе устное.

2) *Первоначальное обученіе дѣтей Ариѳметикѣ должно производиться при помощи наглядныхъ пособій.* Наглядныя пособія должны быть употребляемы преимущественно при изученіи чиселъ до 20, при ознакомленіи дѣтей съ единицами русскихъ мѣръ, при прохожденіи нумераціи большихъ чиселъ и при прохожденіи элементарнаго курса дробей. Главнѣйшія наглядныя пособія и ихъ употребленіе описаны въ самомъ курсѣ.

3) *Способъ преподаванія начальнаго курса Ариѳметики долженъ быть катихитическій.*

Маленькій ученикъ работаетъ усердно и съ пользою тогда, когда работа его интересуетъ. Интересъ работы для ученика, безъ сомнѣнія, долженъ заключаться не въ матеріалѣ, предлагаемомъ для изученія, а въ способѣ разработки и усвоенія этого матеріала. Предлагая ученикамъ работу, интересную только по своему содержанію, легко можно на нѣкоторое время увлечь классъ; но увлеченіе это, по мѣрѣ развитія учениковъ, проходитъ, и самое развитіе этимъ замедляется. Такимъ же образомъ и интересъ самаго преподаванія долженъ состоять не въ излишней болтливости учителя и искусственныхъ ухищреніяхъ, когда преподаваніе обращается въ простой разговоръ учителя съ учениками безъ результатовъ для дѣла,— а въ доступности пониманія учениковъ предмета преподаванія и въ дѣятельномъ ихъ участіи въ разработкѣ учебнаго матеріала. Слѣдуя одному изъ педагогическихъ положеній Песталоцци, что каждый человѣкъ долженъ развиваться извнутри и что дѣло воспитанія и обученія — только помочь ему въ этомъ развитіи, должно согласиться, что преподаваніе начальнаго курса всякаго учебнаго предмета должно быть направлено по тому же пути,

по которому идетъ и все естественное начальное развитіе человѣческаго сознанія. Преподаватель, исходя отъ той точки, на которой остановилось развитіе учащагося, долженъ возбудить въ ученикѣ самодѣятельность и дать ей пищу въ раскрытіи новыхъ мыслей и накопленіи умственнаго матеріала для вывода общихъ положеній и законовъ.

За лучшій способъ преподаванія всѣхъ учебныхъ предметовъ элементарнаго курса, въ этомъ направленіи, слѣдуетъ считать способъ *катихитическій*, посредствомъ котораго ученикъ самъ мало-по-малу, по мѣрѣ своего развитія и своихъ знаній, при помощи учителя, подходитъ къ открытію и усвоенію истины. Все дѣло состоитъ въ томъ, что учитель, пользуясь всѣми предварительными свѣдѣніями учениковъ и зная степень развитія ихъ соображенія, не сообщаетъ самъ новыхъ истинъ, служащихъ основаніемъ умозаключеній, а идетъ путемъ обратнымъ—рядомъ опытовъ подводитъ учениковъ къ раскрытію и усвоенію новой для нихъ истины и затѣмъ уже пользуется ею для дальнѣйшихъ умозаключеній; такъ что истина не дается ученикамъ, какъ нѣчто требующее доказательства и имѣющее практическое приложеніе, а изъ частныхъ практическихъ примѣровъ ученики выводятъ заключеніе о самой необходимости существованія истины. Такой пріемъ выработки свѣдѣній, удерживая въ постоянномъ напряженіи умственныя способности ученика, не только развиваетъ его любознательность, но и даетъ ей обильную пищу. Ученикъ не чувствуетъ себя подавленнымъ сообщаемыми ему умозаключеніями учителя или учебника, но самъ сознаетъ необходимость собственнаго личнаго участія для выработки понятія и умозаключенія; учитель для него есть сила возбуждающая и направляющая. Полная примѣнимость такого способа преподаванія возможна только въ математикѣ. Катихитическій способъ преподаванія, примѣняемый при начальномъ обученіи дѣтей, удовлетворяетъ тремъ главнѣйшимъ цѣлямъ: а) онъ даетъ возможность ученику собственными силами доходить до выработки понятій и умозаключеній, б) ограждаетъ сознаніе и память ученика отъ вторженія въ нихъ понятій и умозаключеній, непосильныхъ его соображенію, и в) возбуждаетъ вниманіе ученика и любовь къ учебному предмету, вовлекая его ежеминутно въ работу мысли.

Помощью постановки вопросовъ ученику дается возможность самому переходить отъ одной математической истины къ другой, близко съ ней связанной. Для этого разработка учебнаго матеріала должна идти такъ, чтобы неизвѣстное ученику вытекало, какъ неизбѣжный результатъ, изъ прежде понятаго и усвоеннаго. Опираясь на понятіяхъ, укрѣпленныхъ въ сознаніи ученика, учитель ставитъ только вопросъ и даетъ ему такую форму, чтобы ученикъ съ возбужденною пытливостію и интерессомъ къ дѣлу подходилъ ближе и ближе къ математическому выводу.

При такомъ ходѣ работы достигается какъ пріобрѣтеніе новаго умозаключенія, такъ и общее развитіе мышленія. А увѣренность въ доступности предмета и въ собственной способности изучать предметъ даетъ ученику силу и охоту идти дальше въ пріобрѣтеніи новыхъ свѣдѣній.

Постановкою послѣдовательныхъ вопросовъ, сообразуясь съ отвѣтами учениковъ, учитель вызываетъ отъ нихъ свѣдѣнія, необходимыя для извѣстнаго вывода, группируетъ эти свѣдѣнія около избраннаго центра разсужденія и снова вопросами даетъ направленіе разсужденію, подводящему къ выводу новаго умозаключенія.

Достоинство катихитическаго способа преподаванія состоитъ въ пріученіи учениковъ къ разнообразію вопросовъ, всестороннему обсужденію разсматриваемаго предмета, пользованію всѣми своими наличными свѣдѣніями во всякій моментъ и къ самостоятельному составленію отвѣтовъ.

Нужно различать катихизацію *повторительную*, когда учитель провѣряетъ уже усвоенное учениками, и *наводящую*, когда производится выработка новаго вывода. Въ первомъ случаѣ вопросы должны быть болѣе обширные по содержанію и требующіе такихъ же отвѣтовъ; во второмъ — вопросы болѣе дробные, постепенно подводящіе къ выводу и направляющіе мышленіе ученика.

Самое полное теоретическое разъясненіе сущности катихитическаго способа преподаванія не можетъ дать такого отчетливаго о немъ понятія человѣку, несвѣдущему въ этомъ дѣлѣ, какъ приложеніе его на практикѣ при разработкѣ учебнаго матеріала, что я надѣюсь сдѣлать съ достаточною подробностью при изложеніи самаго курса. Теперь же приведу нѣкоторые частные пріемы, которые хотя тоже можно будетъ прослѣдить по курсу, но предварительное знаніе которыхъ значительно облегчитъ какъ пониманіе курса, такъ и пользованіе имъ при преподаваніи.

При веденіи преподаванія начальнаго курса по катихитическому способу необходима одновременная работа всѣхъ учениковъ въ классѣ. Учитель можетъ вполнѣ разсчитывать только на тѣ свѣдѣнія учениковъ, которыя они пріобрѣли въ классѣ подъ его руководствомъ и наблюденіемъ. Внѣклассная работа ученика состоитъ въ повтореніи пріобрѣтеннаго въ классѣ на вычисленіи примѣровъ и рѣшеніи задачъ, къ которымъ прилагаются правила и пріемы, выработанные во время урока. Слѣдовательно, правильная организація классной работы, съ соблюденіемъ порядка всего класса и съ возможностью контролировать во всякій данный моментъ участіе въ работѣ каждаго ученика, составляетъ важную задачу учителя, безъ правильнаго рѣшенія которой немыслимо достиженіе хорошихъ результатовъ. Достаточно упустить изъ виду хотя нѣсколько эту чисто внѣшнюю сторону дѣла, чтобы стать въ совершенно ненормальное положеніе относительно класса и обратить все дѣло преподаванія въ пустую болтовню, развивающую изъ учениковъ фразеровъ и побу-

ждающую ихъ относиться къ предмету преподаванія не только небрежно, но даже искать въ немъ средствъ для пустаго развлеченія. Преподаватель, перешедшій эту границу, дѣлается человѣкомъ вреднымъ для обученія и еще болѣе для воспитанія дѣтей.

Катихизируя какой-либо предметъ въ классѣ, учитель долженъ убѣдиться во вниманіи учениковъ къ обсуждаемому предмету, въ пониманіи предлагаемыхъ вопросовъ и въ готовности отвѣчать на эти вопросы: тутъ слѣдовательно важны: постановка учителемъ вопроса, составленіе на него отвѣта учениками и сообщеніе этого отвѣта учителю.

Предлагаемый вопросъ, вытекающій изъ предмета обсужденія, долженъ быть поставленъ не только съ достаточною ясностью, но и безъ добавокъ и повтореній со стороны учителя, что могло бы запутать учениковъ. Двойные вопросы, требующіе за-разъ двухъ отвѣтовъ, затрудняютъ ученика, не позволяя ему сосредоточиться на чемъ-либо одномъ; вопросы, отвѣтъ на которые можетъ быть выраженъ только въ словахъ „да" или „нѣтъ", мало возбуждаютъ мышленіе ученика и весьма часто рѣшаются догадкою; вопросы неопредѣленные, неточные, даютъ ученикамъ возможность отвѣчать необдуманно и потому отнимаютъ напрасно время на выясненіе неправильности отвѣта или содержанія предложеннаго вопроса. Прежде полученія отвѣта на главный вопросъ, затруднившій учениковъ, можно посредствомъ побочныхъ наводящихъ вопросовъ предварительно устранять ложныя представленія и направлять мышленіе учениковъ къ правильному умозаключенію.

Давши классу вопросъ для рѣшенія, учитель предварительно освѣдомляется, всѣ ли ученики поняли его и усвоили. Въ противномъ случаѣ вопросъ долженъ быть повторенъ кѣмъ-либо изъ учениковъ. При контролированіи пониманія и усвоенія вопроса, а также при сужденіи о томъ, какіе ученики и сколько ихъ именно готовы дать отвѣтъ, нужно пріискать средство избѣгать въ классѣ лишняго разговора и безпорядка, который легко возбуждается и мѣшаетъ быстротѣ и правильности разработки учебнаго матеріала, если ученики заявляютъ свои желанія голосомъ или вставаніемъ съ мѣста. Лучше установить какой-либо условный знакъ, посредствомъ котораго ученики безмолвно могли бы отвѣчать учителю на необходимые и частые вопросы, въ родѣ: „кто повторитъ вопросъ, кто можетъ отвѣчать?" и т. п. Лучшимъ условнымъ знакомъ для этого въ нѣмецкихъ и во многихъ нашихъ не только низшихъ, но и среднихъ училищахъ, считаютъ поднятіе ученикомъ правой руки, причемъ наблюдается, чтобы при этомъ со стороны учениковъ соблюдалось полное приличіе въ классѣ, что легко достигается въ нѣсколько уроковъ. При установленіи такого внѣшняго условнаго знака, ученику нѣтъ надобности заявлять словесно о своемъ желаніи отвѣчать на

предложенный вопросъ или о своемъ непониманіи чего-либо разбираемаго на урокѣ. Онъ поднятіемъ руки обращаетъ на себя вниманіе учителя.

Желая получить отвѣтъ на вопросъ, учитель называетъ ученика по фамиліи. Отвѣтъ долженъ отличаться полнотою, то-есть заключать въ себѣ какъ содержаніе вопроса, такъ и его разрѣшеніе. При каждой ошибкѣ отвѣчающаго ученика товарищи его тѣмъ же знакомъ заявляютъ о своемъ вниманіи къ отвѣту и готовности исправить ошибку. Исправленный и хорошо формулированный отвѣтъ повторяется слабѣйшими учениками, и тогда можно быть увѣреннымъ, что отвѣтъ, установленный такимъ образомъ, сдѣлается собственностію учениковъ. Частое повтореніе выработаннаго умозаключенія или правила служитъ сильнымъ орудіемъ обученія.

Во избѣжаніе непроизводительной траты времени нѣтъ надобности подводить учениковъ катихитически къ раскрытію самаго названія предмета разсужденія. Лучше названіе это сообщить прямо ученикамъ.

Въ началѣ работы съ новымъ классомъ дѣло будетъ подвигаться медленно; но, по мѣрѣ развитія учениковъ, пріобрѣтенія ими свѣдѣній и навыка къ процессу ихъ выработки и усвоенія, дѣло пойдетъ быстрѣе, нежели при излагающемъ способѣ преподаванія. Не слѣдуетъ однако упускать изъ виду, что, дѣйствуя такимъ путемъ, неопытный преподаватель легко можетъ увлечься въ крайность и пріучить учениковъ думать только при постановкѣ имъ вопросовъ и составлять въ умѣ только краткія мысли для отвѣтовъ на нихъ. Для избѣжанія этой крайности хорошимъ средствомъ можетъ служить систематическая группировка въ концѣ урока всего пройденнаго въ урокъ учениками, и вызываніе, посредствомъ болѣе обширныхъ вопросовъ, полной и связной передачи пройденнаго однимъ или нѣсколькими учениками, а также частое вызываніе къ классной доскѣ отдѣльныхъ учениковъ для полнаго разсужденія и совершенія вычисленій при рѣшеніи задачи.

Спѣшность со стороны учителя также много вредитъ дѣлу и, противъ ожиданія его, замедляетъ прохожденіе курса; не давая ученику возможности высказать свою мысль до конца частымъ перебиваніемъ и поправками, учитель заставляетъ ученика спѣшить и оттого путаться. Вообще нужно сказать, что катихитическій способъ преподаванія, единственно примѣнимый при начальномъ обученіи дѣтей, есть орудіе весьма опасное въ рукахъ преподавателя, не вполнѣ постигшаго его сущность. Нужно быть очень осторожнымъ и хорошо подготовлять какъ матеріалъ, такъ и главные вопросы каждаго урока, чтобы не обратить классную катихизацію въ безсодержательный разговоръ, изъ котораго ученики ничего не вынесутъ ни для своего развитія, ни для пріобрѣтенія необходимыхъ свѣдѣній. Каждый новый главный вопросъ долженъ быть на столько оттѣненъ, чтобы ученикамъ былъ ясенъ переходъ

отъ одного вопроса къ другому. Спокойное и обдуманное составленіе учениками отвѣта на предлагаемый вопросъ обусловливается спокойствіемъ самого учителя при предложеніи вопроса; суетливость въ этомъ случаѣ болѣе всего вредитъ дѣлу.

Всякій преподаватель, безъ сомнѣнія, согласится съ тѣмъ, что только при серьезномъ и сосредоточенномъ вниманіи ученики могутъ пріобрѣтать свѣдѣнія и подвигаться впередъ въ своемъ умственномъ развитіи. А потому дисциплина класса должна составлять одну изъ немаловажныхъ заботъ учителя. Нѣтъ однакоже возможности дать всѣ указанія, могущія установить у преподавателей однообразный взглядъ на дисциплинарную сторону преподаванія; хотя подобное согласіе весьма легко встрѣтить во многихъ нашихъ школахъ, но согласіе это выработано опытомъ и практикой, а не теоріей. Только достаточный опытъ въ обращеніи съ дѣтьми и психологическія наблюденія сообщаютъ учителю тотъ педагогическій *тактъ*, руководясь которымъ, онъ во всякій данный моментъ, при встрѣтившейся случайности, находитъ въ своемъ педагогическомъ опытѣ требуемое указаніе и поступаетъ въ большей части случаевъ правильно. Даже впослѣдствіи, разбирая свой мимолетный пріемъ, употребленный быстро, при соединеніи многихъ неуловимыхъ случайностей, учитель, обладающій педагогическимъ тактомъ, находитъ, и вполнѣ безошибочно, свой пріемъ соотвѣтствующимъ встрѣтившемуся случайному обстоятельству. Часто очень дисциплинарные пріемы, употребляемые съ пользою однимъ преподавателемъ, совершенно недѣйствительны въ рукахъ другаго, что зависитъ отъ множества особенностей, свойственныхъ складу ума и характера каждаго человѣка. Нигдѣ такъ рѣзко не разоблачаются нѣкоторые недостатки учителей, какъ въ классѣ при катихитическомъ способѣ преподаванія. Здѣсь учитель находится въ постоянномъ общеніи съ учениками. Легко усвоиваемыя учителями привычки—насмѣшливость, излишняя говорливость, покрикиваніе на учениковъ и т. п. скорѣе могутъ вредить при этомъ способѣ преподаванія, нежели при догматическомъ, когда учителю легче услѣдить за собой самимъ. Не вдаваясь въ обсужденіе этого сложнаго вопроса, обусловливаемаго множествомъ частностей и чисто случайныхъ обстоятельствъ, я могу выразить только желаніе, чтобы начинающіе преподаватели придавали побольше значенія этой сторонѣ педагогическаго дѣла и заботились объ установленіи вполнѣ обдуманныхъ пріемовъ обращенія съ учениками и поддержанія постояннаго порядка во время урока. Подражаніе въ этомъ дѣлѣ мало можетъ быть полезно, если заимствованные у другаго преподавателя пріемы не обратились въ полную собственность заимствующаго.

Программа Сборника ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса.

Для удобства ссылокъ въ Руководствѣ на различные отдѣлы Сборника задачъ привожу здѣсь подробную программу составленнаго мною, сообразно предлагаемой въ Руководствѣ системѣ курса, Сборника ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса. При этомъ программу 1-й части Сборника излагаю всю, а изъ 2-й части только приготовительный курсъ дробей. Сборникъ этотъ въ двѣнадцатомъ изданіи 1-й части и въ девятомъ изданіи 2-й части значительно измѣненъ и дополненъ. Эти измѣненія и дополненія подробно указаны въ предисловіяхъ къ обѣимъ частямъ Сборника.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ.

Цѣлыя числа.

ОТДѢЛЪ I—ЗАДАЧИ.

А) Курсъ приготовительный.

1) Задачи на числа первой сотни.

а) Задачи на числа отъ 1 до 10.
б) Задачи на числа отъ 11 до 20.
в) Задачи на числа отъ 21 до 30.
г) Задачи на числа отъ 31 до 40.
д) Задачи на числа отъ 41 до 50.
е) Задачи на числа отъ 51 до 60.
ж) Задачи на числа отъ 61 до 70.
з) Задачи на числа отъ 71 до 80.
и) Задачи на числа отъ 81 до 90.
і) Задачи на числа отъ 91 до 100.

2) Задачи на составныя именованныя числа до 100.

а) Задачи на мѣры сыпучихъ тѣлъ.
б) Задачи на мѣры длины.
в) Задачи на мѣры вѣса.

Б) Курсъ систематическій.

1) Отвлеченныя числа.

а) Устныя задачи на числа до 1000.
б) Задачи на сложеніе.
в) Задачи на вычитаніе.
г) Задачи на умноженіе.
д) Задачи на дѣленіе.
е) Задачи на всѣ четыре дѣйствія.

2) Составныя именованныя числа.

а) Задачи на сложеніе.
б) Задачи на вычитаніе.
в) Задачи на вычисленіе времени.
г) Задачи на умноженіе.
д) Задачи на дѣленіе.
е) Задачи на всѣ четыре дѣйствія.

ДОПОЛНЕНІЕ.

Задачи на вычисленіе поверхности и объема.

ОТДѢЛЪ II—ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМѢРЫ.

А) Курсъ приготовительный.

1) Примѣры для вычисленій съ отвлеченными числами отъ 1 до 100.

а) Примѣры отъ 1 до 10.
б) Примѣры отъ 11 до 20.
в) Примѣры отъ 21 до 30.
г) Примѣры отъ 31 до 40.
д) Примѣры отъ 41 до 50.
е) Примѣры отъ 51 до 60.
ж) Примѣры отъ 61 до 70.
з) Примѣры отъ 71 до 80.
и) Примѣры отъ 81 до 90.
і) Примѣры отъ 91 до 100.
Пифагорова таблица умноженія.

2) Примѣры для вычисленій съ составными именованными числами до 100.

а) Раздробленіе.
б) Превращеніе.
в) Примѣры на сложеніе.
г) Примѣры на вычитаніе.
д) Примѣры на умноженіе.
е) Примѣры на дѣленіе.
ж) Примѣры на всѣ 4 дѣйствія.

Б) Курсъ систематическій.

1) Отвлеченныя числа.

а) Примѣры на словесное и письменное счисленіе.
б) Примѣры на сложеніе.
в) Примѣры на вычитаніе.
г) Примѣры на умноженіе.
д) Примѣры на дѣленіе.
е) Примѣры на всѣ 4 дѣйствія.
ж) Вопросы и примѣры для повѣрки дѣйствій и опредѣленія зависимости результатовъ отъ измѣненія всѣхъ элементовъ.

2) Составныя именованныя числа.

а) Раздробленіе.
б) Превращеніе.
в) Примѣры на сложеніе.
г) Примѣры на вычитаніе.
д) Примѣры на умноженіе.
е) Примѣры на дѣленіе.
ж) Примѣры на всѣ 4 дѣйствія.
Таблица русскихъ мѣръ.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

Дроби.

А) Курсъ приготовительный.

1) Происхожденіе дроби.

а) Задачи.
б) Примѣры.

2) Сокращеніе дробей.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

3) Увеличеніе и уменьшеніе дробей.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

4) Сложеніе и вычитаніе дробей.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

5) Нахожденіе частей даннаго числа.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

6) Нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

7) Содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

8) Смѣшанныя задачи и примѣры.

а) Устныя задачи.
б) Письменныя задачи.
в) Примѣры.

9) Примѣры для вычисленій съ дробными именованными числами.

ПРОГРАММА КУРСА.

Возрастъ дѣтей, приступающихъ къ обученію Ариѳметикѣ, полагается отъ 7 лѣтъ. Учебный годъ считается отъ 39 до 40 недѣль.

Первый годъ (3 часа или 6 получасовъ въ недѣлю).

Изученіе чиселъ отъ 1 до 20. Полное усвоеніе табличекъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія въ этомъ предѣлѣ чиселъ. Изображеніе чиселъ цифрами. Рѣшеніе задачъ изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы задачъ на числа отъ 1 до 10 и на числа отъ 11 до 20. Вычисленіе примѣровъ изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы примѣровъ для вычисленій на числа отъ 1 до 10 и на числа отъ 11 до 20.

Второй годъ (4 часа въ недѣлю).

1) Изученіе чиселъ отъ 21 до 100. Таблица умноженія. Бѣглое вычисленіе съ числами этого предѣла. Разложеніе сложнаго числа на два множителя. Дѣлители сложныхъ чиселъ до 100 включительно. Рѣшеніе задачъ изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы задачъ на числа: отъ 11 до 20, отъ 21 до 30, отъ 31 до 40, отъ 41 до 50, отъ 51 до 60, отъ 61 до 70, отъ 71 до 80, отъ 81 до 90 и отъ 91 до 100. Вычисленіе примѣровъ изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы примѣровъ на числа: отъ 11 до 20, отъ 21 до 30 и т. д., отъ 91 до 100.

2) Группировка вычисленій въ четыре дѣйствія съ числами. Опредѣленіе каждаго дѣйствія и случаи приложенія его при рѣшеніи задачъ. Выдѣленіе и опредѣленіе элементовъ и результатовъ каждаго дѣйствія. Измѣненіе результатовъ дѣйствій, зависящее отъ измѣненія величины элементовъ. Повѣрка дѣйствій.

3) Дѣйствія съ составными именованными числами въ предѣлѣ чиселъ до 100. Рѣшеніе задачъ изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы задачъ: 1) на мѣры сыпучихъ тѣлъ, 2) на мѣры длины и 3) на мѣры вѣса. Вычисленіе примѣровъ съ составными именованными числами изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлъ примѣровъ для вычисленій съ составными именованными числами до 100.

Третій годъ (4 часа въ недѣлю).

1) Нумерація чиселъ отъ 1 до 1000. Ознакомленіе съ числами этого предѣла на рѣшеніи задачъ изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлъ устныхъ задачъ на числа до 1000.

2) Нумерація чиселъ любой величины. Изъ Сборника задачъ, часть 1-я, примѣры на словесное и письменное счисленіе. Четыре дѣйствія съ отвлеченными числами. Изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы: численные примѣры и задачи на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ четыре дѣйствія. Повѣрка четырехъ дѣйствій и опредѣленіе зависимости величины результатовъ дѣйствій отъ измѣненія величины элементовъ. Изъ Сборника, часть 1-я, отдѣлы: вопросы и примѣры для повѣрки дѣйствій и опредѣленія зависимости результатовъ дѣйствій отъ измѣненія величины элементовъ.

3) Четыре дѣйствія съ составными именованными числами. Изъ Сборника задачъ, часть 1-я, отдѣлы: численные примѣры на раздробленіе и превращеніе, задачи на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ четыре дѣйствія съ составными именованными числами и примѣры на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія съ составными именованными числами.

4) Элементарный курсъ простыхъ дробей. Происхожденіе дроби. Увеличеніе и уменьшеніе дробей. Сокращеніе. Сложеніе и вычитаніе дробей. Нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей даннаго числа. Нахожденіе неизвѣстнаго по даннымъ его частямъ. Содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ. Изъ Сборника задачъ, часть 2-я, отдѣлы изъ курса приготовительнаго: задачи и численные примѣры на происхожденіе и сокращеніе дробей, увеличеніе и уменьшеніе, сложеніе и вычитаніе дробей, нахожденіе частей даннаго числа, нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ, содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ, задачи и численные примѣры для повторенія всего курса дробей. Изъ Сборника задачъ, часть 1-я, задачи на вычисленіе поверхности и объема.

5) Повтореніе по краткому учебнику всего пройденнаго курса.

ГОДЪ ПЕРВЫЙ.

1. Изученіе чиселъ отъ 1 до 10.

При начальномъ обученіи дѣтей Ариѳметикѣ, важно: 1) дать имъ учебный матеріалъ, вполнѣ доступный ихъ пониманію; въ этомъ отношеніи Грубе справедливо говоритъ и доказываетъ, что предѣлъ числа, доступный осязательному пониманію семилѣтняго ученика, не выше 100; 2) пріучать ихъ на этомъ учебномъ матеріалѣ мыслить и выражаться правильно и послѣдовательно; 3) познакомить съ основными свойствами и составомъ числа; 4) дать начала для быстраго и правильнаго вычисленія, и, наконецъ, 5) довести учащихся до пониманія необходимости различныхъ дѣйствій съ числами и до выясненія сущности каждаго дѣйствія.

Всѣ эти цѣли хорошо достигаются на изученіи чиселъ первой сотни. Слово „*изучить число*" не должно быть понимаемо въ слишкомъ обширномъ смыслѣ, иначе это изученіе потребовало бы такихъ пріемовъ, которые менѣе доступны пониманію дѣтей, нежели непосредственное знакомство съ нумераціей чиселъ до высшихъ предѣловъ и съ дѣйствіями надъ этими числами. Изучить число значитъ на столько овладѣть имъ, чтобы во всякомъ данномъ случаѣ, при всякомъ вычисленіи, можно было пользоваться этимъ числомъ свободно и сознательно. Нужно составить раздѣльное понятіе о числѣ вообще и единицѣ. Нужно усвоить сознательно въ памяти составъ каждаго числа первой сотни изъ единицъ и отношеніе его къ предшествующимъ и послѣдующимъ числамъ. Нужно научиться быстро и безошибочно складывать и вычитать числа этого предѣла, а также усвоить составъ каждаго числа изъ множителей и дѣлимость числа на своихъ производителей. Всякое усвоенное отношеніе чиселъ ученикъ долженъ свободно прилагать къ рѣшенію практическихъ вопросовъ.

На изученіи чиселъ перваго десятка дѣти знакомятся съ первыми пріемами правильнаго разсужденія и съ первыми пріемами вычисленій. Если ученикъ не усвоилъ разъ навсегда сознательно, что 8 безъ 5 будетъ 3, то, безъ сомнѣнія, онъ не будетъ въ состояніи вычесть 15 изъ 28, или же долженъ для пополненія этого пробѣла механически выучить наизустъ

табличку вычитанія однозначныхъ чиселъ. Здѣсь же ученикъ вполнѣ осязательно знакомится съ самыми необходимыми основными понятіями, безъ которыхъ невозможно изученіе дальнѣйшаго курса Ариѳметики, каковы: прибавить, отнять, уменьшить, увеличить, узнать содержаніе одной величины въ другой, раздѣлить на равныя части величину и т. п. Все это, пріобрѣтенное наглядно и въ предѣлѣ числа, доступномъ умственному кругозору ученика, дѣлается дѣйствительною его собственностью, которою онъ будетъ впослѣдствіи свободно пользоваться при всякомъ данномъ случаѣ. Вотъ почему съ первыхъ же уроковъ слѣдуетъ съ достаточною подробностію остановиться на разсмотрѣніи самыхъ малыхъ чиселъ, каковы: 1, 2, 3. Изъ того, что дѣти семи лѣтъ уже часто имѣли случай вычислять съ числами перваго десятка, не слѣдуетъ выводить заключенія, что подробное разсмотрѣніе этихъ чиселъ въ школѣ не нужно. Во-первыхъ, не всѣ дѣти до поступленія въ школу хорошо знаютъ отношенія чиселъ перваго десятка, а школа должна учить всѣхъ, а не нѣкоторыхъ. Во-вторыхъ, начало правильнаго обученія и должно состоять въ томъ, что разнообразныя, разбросанныя, практически пріобрѣтенныя свѣдѣнія приводятся въ стройный порядокъ, подводятся къ немногимъ общимъ правиламъ, дающимъ въ свою очередь матеріалъ для послѣдующихъ выводовъ.

На изученіи чиселъ втораго десятка ученикъ, во-первыхъ, повторяетъ понятія и пріемы уже ему знакомые и, во-вторыхъ, знакомится съ новыми пріемами вычисленія, каковы, напримѣръ, пріемы, служащіе для опредѣленія связи между собою чиселъ однозначныхъ, дающей въ результатѣ число двузначное (9 + 5 или 3 × 6), и отношеній чиселъ двузначныхъ между собою и къ числамъ однозначнымъ (17—13 или 18 : 6). Если ученикъ, напримѣръ, усвоилъ пріемъ вычитанія 19—16 или 15—9, то онъ весьма легко примѣнитъ его потомъ къ вычитанію всякихъ чиселъ. А на множествѣ упражненій съ числами этого предѣла ученикъ, усвоивая самый пріемъ вычисленія, попутно и незамѣтно усвоиваетъ таблицы сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

При изученіи слѣдующихъ чиселъ до 100 ученикъ встрѣчаетъ случаи приложенія усвоенныхъ понятій и пріемовъ въ болѣе широкихъ размѣрахъ, а также снова встрѣчаетъ необходимость въ новыхъ пріемахъ (63—27, 6 × 12, 84 : 12 и т. п.). Научившись связывать числа и находить между ними отношенія въ этомъ предѣлѣ, ученикъ безъ всякаго затрудненія будетъ вычислять съ числами любой величины. Переходъ отъ пріема умноженія 16 на 5 къ пріему умноженія 2568 на 7 представитъ для такого ученика только случай приложенія усвоеннаго. Зная составъ особенно замѣчательныхъ сложныхъ чиселъ, каковы: 24, 36, 40, 60, 72 и другія, ученикъ воспользуется этимъ знаніемъ и при разложе-

ніи чиселъ на множителей, и при сложеніи дробей, и при всякомъ вычисленіи вообще. Тяжело смотрѣть, когда ученикъ, прошедшій полный курсъ Ариѳметики, для сложенія $^7/_{12}$ и $^4/_{15}$ разлагаетъ 12 и 15 на множителей, да еще при посредствѣ вертикальной черты, и механически составляетъ наименьшее кратное число, или сокращаетъ дробь $^{36}/_{72}$ сначала на 2, потомъ опять на 2, потомъ на 3 и т. д., или по признакамъ дѣлимости опредѣляетъ, на сколько можно сократить эту дробь. А откуда же ученикъ пріобрѣтетъ навыкъ владѣть числомъ, если онъ началъ знакомиться прямо съ большими числами?

Познакомившись наглядно и вполнѣ осязательно съ соотношеніями и комбинаціями чиселъ въ предѣлѣ первой сотни, ученикъ самъ распредѣлитъ дѣйствія съ числами, сознательно опредѣлитъ каждое дѣйствіе и выдѣлитъ въ немъ числа данныя и искомое; а также, выяснивъ себѣ сущность каждаго дѣйствія, ученикъ при рѣшеніи задачи будетъ прилагать то или другое дѣйствіе не наугадъ, а по условіямъ задачи.

Съ такимъ запасомъ свѣдѣній и развитія, пріобрѣтенныхъ на изученіи курса Ариѳметики такъ сказать въ маломъ объемѣ, ученикъ безбоязненно и вполнѣ сознательно можетъ перейти къ изученію дальнѣйшаго курса. Весь этотъ дальнѣйшій курсъ цѣлыхъ чиселъ будетъ только расширеніемъ тѣхъ понятій и пріемовъ вычисленія, которые уже основательно знакомы ученику. Все дѣло будетъ состоять только въ новомъ распредѣленіи и приведеніи въ новый порядокъ этихъ понятій и пріемовъ.

Расширить предѣлъ числа для подробнаго изученія именно до 100 необходимо еще и потому, что въ этомъ предѣлѣ числа возможно знакомство учениковъ съ дѣйствіями съ составными именованными числами и съ простѣйшими дробями и ихъ соотношеніями. При меньшемъ предѣлѣ числа подборъ упражненій для этихъ случаевъ представилъ бы большое затрудненіе.

Обыкновенное замѣчаніе людей, несвѣдущихъ въ дѣлѣ начальнаго обученія дѣтей, что дѣти въ семь лѣтъ встрѣчаются въ жизни съ числами, превышающими предѣлъ изучаемыхъ ими въ школѣ чиселъ, каковы, напримѣръ, числа, означающія годы событій и т. п., не имѣетъ никакого значенія въ педагогическомъ отношеніи. Счетъ практическій и изученіе числа—понятія различныя, и изъ того, что иной шестилѣтній ребенокъ умѣетъ считать до тысячи и далѣе, нельзя выводить никакихъ заключеній о его способности къ развитію и къ изученію Ариѳметики и о необходимости для него курса Ариѳметики, начинающаго сразу съ общаго понятія о числѣ. Было бы странно удерживать ребенка отъ знакомства со счетомъ предметовъ, если его житейская обстановка даетъ къ

тому поводъ; но было бы еще болѣе странно намѣренно заботиться о развитіи въ немъ наклонности къ механическому счету.

Почти всѣ составители курсовъ по методу Грубе дѣлаютъ ту важную ошибку, что на первомъ же урокѣ, то-есть при изученіи единицы, сразу вводятъ много выраженій, непонятныхъ дѣтямъ, каковы напримѣръ: „одиножды одинъ, одинъ въ одномъ содержится одинъ разъ, одинъ безъ одного“, или даже такія выраженія: „одинъ, умноженный на одинъ, одинъ минусъ одинъ, одинъ плюсъ нуль, одиножды нуль“, причемъ эти выраженія сопровождаются обозначеніями, каковы: $1 \times 1 = 1, 1 + 0 = 1$ и т. д. Такой пріемъ въ самомъ началѣ обученія сильно затрудняетъ дѣтей и требуетъ со стороны ихъ непроизводительнаго напряженія мысли и запоминанія непонятныхъ выраженій. Дѣйствительно, при подобнаго рода упражненіяхъ, на изученіе одной единицы можно затратить урока три или четыре; но какая будетъ отъ того польза, а работа для дѣтей выйдетъ очень скучная и тяжелая. Необходимо давать дѣтямъ на первыхъ порахъ обученія упражненія самыя естественныя и выражаться при этомъ языкомъ вполнѣ для нихъ понятнымъ. Обобщеніе выраженій въ сжатую форму, составленіе выводовъ и письменное обозначеніе вычисленій должны входить мало-по-малу, исподоволь, по мѣрѣ надобности и по мѣрѣ накопленія достаточнаго количества данныхъ.

Упражненія на наглядныхъ пособіяхъ при изученіи первыхъ трехъ чиселъ: 1, 2 и 3 до того просты и всякому, даже никогда неучившему дѣтей, понятны, что, собственно говоря, излишне было бы ихъ и приводить здѣсь. Я излагаю однако главнѣйшія изъ нихъ, имѣя въ виду полноту курса. При этомъ спѣшу оговориться, что такъ какъ курсъ мой предназначается для пособія учителямъ при преподаваніи, то самыя упражненія будутъ постоянно сопровождаться замѣчаніями и поясненіями, обращенными къ учителю, а не къ ученику

При изученіи чиселъ первой сотни самыми лучшими пособіями считаются различныхъ видовъ счеты и ариѳметическій ящикъ *). При изложеніи упражненій для изученія отдѣльныхъ чиселъ я буду примѣнять преимущественно эти пособія, чтобы хорошо ознакомить учителей съ ними, хотя также, имѣя въ виду, что не во всѣхъ школахъ имѣются именно эти пособія, буду примѣнять и другія. Укажу также различныя пріемы при изученіи чиселъ, дабы дать учителю возможность избѣжать того

---

*) Полное собраніе наглядныхъ учебныхъ пособій по всѣмъ предметамъ обученія можно всегда видѣть въ Педагогическомъ музеѣ Военно-Учебныхъ Заведеній въ С.-Петербургѣ, противъ Лѣтняго сада, въ бывшемъ Соляномъ городкѣ. Пособія эти продаются у коммиссіонера Военно-Учебныхъ Заведеній Н. Фену и К°.

однообразія упражненій, которое наскучаетъ маленькимъ ученикамъ и утомляетъ ихъ, и за которое по справедливости многіе учителя упрекаютъ Грубе и его послѣдователей. Изъ этого впрочемъ вовсе не слѣдуетъ, что учитель долженъ примѣнять эти пріемы именно при изученіи тѣхъ чиселъ, при которыхъ они изложены; я даю только матеріалъ и указываю, какъ имъ пользоваться, а примѣнить его на практикѣ въ томъ видѣ, въ которомъ онъ предложенъ, или въ другомъ, болѣе подходящемъ къ данному случаю—дѣло учителя.

Итакъ, при изученіи первыхъ трехъ чиселъ, какъ уже сказано, нѣтъ надобности строго располагать упражненія—всѣ они должны быть наглядны и не могутъ относиться къ числу отвлеченному. Начиная съ числа 4, я укажу опредѣленный порядокъ упражненій при изученіи отдѣльнаго числа, такъ какъ это число, по составу своему и величинѣ, даетъ уже къ тому поводъ и возможность.

Одинъ.

Показывая ученикамъ одинъ кубикъ, учитель спрашиваетъ: „сколько у меня кубиковъ?“ — одинъ,—а взявши въ другую руку нѣсколько кубиковъ, спрашиваетъ: „а здѣсь сколько?“ Много, нѣсколько.

Назовите здѣсь въ классѣ такой предметъ, которыхъ есть нѣсколько. Скамья, окно, стѣна, тетрадь, карандашъ, грифель, ученикъ и проч.

Назовите такой предметъ, который въ классѣ только и есть одинъ. Потолокъ, полъ, образъ, учитель и проч.

Если этотъ кубикъ я спрячу въ карманъ, то сколько кубиковъ у меня будетъ въ рукѣ? Ни одного.

А сколько я долженъ снова положить кубиковъ въ руку, чтобы ихъ было тамъ столько же, какъ и прежде? Одинъ.

Возьмите ваши доски (или тетради). Проведите одну черту такой величины (учитель чертитъ на классной доскѣ линію въ вершокъ или въ два вершка, или показываетъ на линейкѣ такую длину). Сотрите ее. Сколько черточекъ осталось? Ни одной.

Начертите нѣсколько такихъ черточекъ одну подъ другой. Начертите много такихъ черточекъ.

На послѣднемъ упражненіи дѣти по своему черченіемъ черточекъ выясняютъ себѣ понятія *одинъ*, *нѣсколько* и *много* и въ то же время упражняются въ черченіи линій опредѣленной величины. При этомъ учителю удобно открыть, кто изъ дѣтей умѣетъ считать и до какого числа,

потому что они обыкновенно заявляютъ сами: „я начертилъ столько-то черточекъ, я начертилъ столько, что и не сосчитать“ и т. п.

Придумывать какія-либо еще другія упражненія для знакомства дѣтей съ числомъ *одинъ* было бы неестественно. Достаточно возбудить въ нихъ то представленіе о единицѣ, которое они, безъ сомнѣнія, имѣли и до начала обученія въ школѣ.

Два.

Вотъ у меня кубикъ, возьму еще одинъ, сколько теперь у меня кубиковъ въ рукѣ? Два.

А сколько у меня рукъ? Разложу эти кубики въ обѣ руки, по скольку будетъ въ каждой? По одному.

Сколькимъ дѣтямъ я могу дать эти кубики по одному? Двоимъ.

Сколько у человѣка глазъ? Какихъ еще частей у человѣка по двѣ? Назовите животныхъ, у которыхъ по двѣ ноги.

Сколько разъ я долженъ взять со стола по одному кубику, чтобы у меня получилось въ рукѣ два кубика? Два раза.

Если я дамъ каждому изъ васъ по одному кубику и потомъ еще по одному, то по скольку кубиковъ будетъ у каждаго изъ васъ? По два.

А если я всѣ ваши кубики соберу и положу на столъ, сколько ихъ будетъ? Нѣсколько, много.

Вотъ монеты въ одну копейку. Возьмите двѣ такихъ монеты. Не знаетъ ли кто одной монеты, за которую даютъ двѣ этихъ?

Задачи:

У мальчика было двѣ груши; одну онъ отдалъ своему товарищу. Сколько грушъ у него осталось?

Дѣвочка купила на одну копейку сухарей и дала лавочнику монету въ двѣ копейки. Сколько сдачи получила она?

Сколько сливъ дадутъ на двѣ копейки, если каждая слива стоитъ одну копейку?

Мальчикъ купилъ грифель и далъ лавочнику монету въ двѣ копейки. Сколько заплатилъ онъ за грифель, если сдачи получилъ одну копейку?

У брата было два яблока, а у сестры вдвое менѣе. Сколько яблокъ было у сестры?

У брата было двѣ копейки; половину всѣхъ этихъ денегъ онъ далъ сестрѣ. Сколько денегъ осталось у брата?

Задача, напримѣръ третья, рѣшается такъ: дѣти, повторивъ содержаніе задачи и подумавъ, отвѣчаютъ: „на двѣ копейки дадутъ двѣ сливы.“ На вопросъ, почему они такъ думаютъ, отвѣчаютъ: „каждая слива стоитъ одну копейку, значитъ на двѣ копейки дадутъ двѣ сливы.“

Три.

Учитель раздаетъ ученикамъ каждому по два кубика.

Сколько кубиковъ у каждаго изъ васъ? Два.

А сколько будетъ, если я еще дамъ каждому по одному кубику? Три.

Что больше: два или три? Чѣмъ три кубика больше двухъ? Разложите ваши кубики передъ собой по одному. Сколько разъ по одному кубику нужно взять, чтобы составить три?

Какъ еще можно разложить ваши кубики? Два и одинъ.

По скольку кубиковъ останется у васъ, если я возьму отъ каждаго по два кубика? По одному.

А если я вмѣсто двухъ возьму по одному? Останется по два.

Сколько разъ каждый изъ васъ можетъ дать мнѣ по одному кубику? Три раза.

Кто видѣлъ монету въ три копейки?

На какія монеты можно ее размѣнять?

Скажите теперь, сколько будетъ одинъ да одинъ и еще одинъ? Сколько будетъ два да одинъ? Одинъ да два? Три безъ одного? Три безъ двухъ? Сколько разъ отъ трехъ можно отнять по одному?

Задачи:

Въ комнатѣ три окна; одно изъ нихъ закрыто ставней. Сколько оконъ не закрыто ставнями?

Крестьянинъ запрегъ три лошади въ телѣги, въ каждую телѣгу по одной, и привезъ на этихъ лошадяхъ все скошенное сѣно. На сколькихъ телѣгахъ привезъ онъ сѣно?

Мать купила нѣсколько пряниковъ; одинъ дала она дочери, а остальные два сыну. Сколько пряниковъ купила она?

У мальчика была монета въ три копейки; онъ купилъ два кренделя и за каждый заплатилъ по одной копейкѣ. Сколько денегъ осталось у мальчика отъ этой покупки?

Продавецъ за яблоко проситъ три копейки, а у дѣвочки есть только двѣ монеты по одной копейкѣ. Сколько ей не достаетъ, чтобы купить это яблоко?

Мать роздала три кренделя всѣмъ своимъ дочерямъ, каждой по одному. Сколько у нея дочерей?

Какъ можно раздѣлить три орѣха между мальчикомъ и дѣвочкой?

Какъ видно изъ приведенныхъ мною упражненій, для изученія первыхъ трехъ чиселъ по ихъ составу и взаимному отношенію, они двухъ родовъ: 1) упражненія на наглядныхъ пособіяхъ, когда дѣти прямо говорятъ о томъ, что у нихъ передъ глазами, и составляютъ ясное представленіе изучаемаго числа, и 2) рѣшеніе задачъ; это послѣднее упражненіе служитъ для того, чтобы отвлечь дѣтей отъ предметовъ, находящихся передъ глазами, и перенести число въ сознаніе, хотя еще и не вполнѣ въ отвлеченномъ видѣ. Дѣти при этомъ уже не глазами и руками, а мысленно считаютъ предметы, хорошо имъ извѣстные, но во время работы не могущіе быть въ соприкосновеніи съ органами чувствъ. На тѣхъ и другихъ упражненіяхъ имѣется въ виду также познакомить дѣтей съ особенностью языка и пріучить ихъ выражаться опредѣленно.

Начиная съ числа *четыре*, я уже привожу упражненія въ стройномъ порядкѣ, хотя вовсе не хочу этимъ сказать, что упражненія нужно систематизировать, начиная именно съ этого числа. Послѣднее зависитъ вполнѣ и отъ учениковъ, и отъ учителя. Многія дѣти изъ собственнаго житейскаго опыта выносятъ уже до 6 лѣтъ такое хорошее знаніе многихъ отношеній чиселъ перваго десятка, что достаточно, для приведенія въ порядокъ и окончательнаго закрѣпленія этихъ свѣдѣній, предложить имъ нѣсколько задачъ и вопросовъ на число, стоящее на очереди, чтобы убѣдиться въ томъ, что кропотливое изученіе числа по строго расположеннымъ упражненіямъ совершенно излишне и можетъ наводить на учащихся скуку и отвращеніе къ работѣ. Слѣдовательно, вводя систему при изученіи числа *четыре*, я имѣю въ виду только начать знакомить самого учителя съ тѣмъ порядкомъ упражненій, котораго, по моему мнѣнію, слѣдуетъ держаться при изученіи чиселъ перваго десятка.

Весьма важно для расположенія упражненій при изученіи отдѣльнаго числа выбрать самое простое и вполнѣ естественное *исходное* начало, понятное всякому учащему дѣтей, и затѣмъ распредѣлить всѣ упражненія такъ, чтобы одно вытекало изъ другаго и одно дополняло другое.

За такое начало, дающее направленіе всей работѣ, какъ при изученіи чиселъ перваго десятка, такъ и при изученіи чиселъ всей сотни, я принимаю *разложеніе изучаемаго числа на слагаемыя*. Сложеніе есть основное ариѳметическое дѣйствіе,—всѣ прочія дѣйствія происходятъ изъ него путемъ упрощенія вычисленія. Желая быть вполнѣ понятнымъ, я хотя вкратцѣ поясню эту простую мысль. Вычитаніе чиселъ производится легко и просто посредствомъ сложенія и есть ни что иное, какъ упрощеніе этого послѣдняго посредствомъ запоминанія таблички сложенія:

кто знаетъ хорошо, что 5 да 3 составитъ 8, тотъ также хорошо знаетъ, что 8 безъ 5 будетъ 3. Напримѣръ, изъ 25 вычесть 17 можно посредствомъ сложенія двумя способами: а) постепеннымъ прибавленіемъ къ вычитаемому по единицѣ до тѣхъ поръ, пока оно сравняется съ уменьшаемымъ; оказывается, что 17 разнится отъ 25 на 8 единицъ; б) прибавленіемъ къ вычитаемому чиселъ наугадъ, сначала 2, потомъ еще 3, потомъ еще 2, пока получится число равное уменьшаемому. Значитъ, видоизмѣненіе въ нашемъ примѣрѣ сложенія въ противоположное ему дѣйствіе—вычитаніе въ томъ только и состоитъ, что мы, или на основаніи многихъ упражненій въ подобномъ сложеніи, или на основаніи простаго заучиванія наизустъ, навсегда закрѣпили въ памяти, что 15 безъ 7 будетъ 8 (такъ какъ 25 и 17 имѣютъ оба по общему десятку, слѣдовательно приходится сравнивать только 15 и 7), и затѣмъ пользуемся этимъ знаніемъ при всѣхъ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

Что умноженіе есть сложеніе, упрощенное посредствомъ извѣстной наизустъ таблицы сложенія чиселъ, взятыхъ нѣсколько разъ слагаемыми, это безъ сомнѣнія извѣстно всякому знающему это дѣйствіе. Складывая по 6 пять разъ, мы запоминаемъ наконецъ, что пятью шесть будетъ тридцать, или просто выучиваемъ это на память.

Дѣленіе чиселъ производится непосредственно черезъ сложеніе дѣлителя, который берется послѣдовательно слагаемымъ до тѣхъ поръ, пока въ окончательной суммѣ получится число, равное дѣлимому, или разнящееся отъ него на число меньшее дѣлителя. Такое продолжительное сложеніе дѣлителя замѣняется, для упрощенія вычисленія, умноженіемъ его на такое число, что въ произведеніи получается число равное дѣлимому, или отличающееся отъ него на число меньшее дѣлителя, и эта разность полученнаго произведенія отъ дѣлимаго опредѣляется уже посредствомъ вычитанія.

Такимъ образомъ, незнающій никакого другаго дѣйствія, кромѣ сложенія, можетъ всѣ четыре ариѳметическія дѣйствія производить посредствомъ одного этого дѣйствія. Это обыкновенно и осуществляется на практикѣ на торговыхъ счетахъ, для чего существуютъ и руководства.

Но мысль объ упрощеніи дѣйствія можетъ явиться у учащихся только тогда, когда они усвоили дѣйствіе основное, изъ котораго посредствомъ упрощенія и вытекаютъ всѣ другія; притомъ необходимо, чтобы эти упрощенія и обобщенія въ новыя дѣйствія возникали естественно, безъ натяжки и постепенно. Для естественности возникновенія изъ основнаго дѣйствія другихъ трехъ служитъ принятый мною порядокъ упражненій при изученіи отдѣльнаго числа, а для постепенности служитъ расположеніе всего курса изученія чиселъ первой сотни. Внимательно

знакомящійся съ моимъ методомъ учитель удобно можетъ прослѣдить то и другое по самому курсу.

При изученіи отдѣльныхъ чиселъ перваго десятка упражненія располагаются въ такомъ порядкѣ:

1) Образованіе новаго числа прибавленіемъ единицы къ числу предшествовавшему.

2) Разложеніе числа на составляющія его слагаемыя самими учениками при посредствѣ наглядныхъ пособій.

3) Приведеніе въ порядокъ разложенія, сдѣланнаго учениками. Для закрѣпленія этого порядка въ сознаніи учениковъ служатъ письменныя упражненія посредствомъ черченія на доскахъ или въ тетрадяхъ черточекъ, кружковъ, крестиковъ и т. п., а потомъ и посредствомъ цифръ и знака дѣйствія.

4) Вопросы по поводу сдѣланнаго и приведеннаго въ порядокъ разложенія для сравненія изучаемаго числа съ каждымъ изъ предшествовавшихъ и для вывода всѣхъ отношеній его къ предшествовавшимъ числамъ и связи съ ними, выраженныхъ четырьмя ариѳметическими дѣйствіями.

5) Рѣшеніе практическихъ задачъ для большаго закрѣпленія въ памяти изучаемыхъ на основаніи 3-го и 4-го упражненій отношеній чиселъ и приложеніе усвоеннаго въ отвлеченномъ видѣ знанія къ частнымъ практическимъ случаямъ. Ученикъ въ задачѣ долженъ открыть извѣстное соотношеніе между данными числами и приложить свое знаніе къ опредѣленію результата этого соотношенія.

6) Бѣглое устное вычисленіе, вычисленіе примѣровъ и вопросы въ разбивку, относящіеся прямо къ числу отвлеченному, для повторенія всего пройденнаго о числѣ и преимущественно для сравненія между собою чиселъ въ кратномъ ихъ отношеніи.

Упражненія второе и третье послѣ изученія трехъ или четырехъ чиселъ могутъ быть соединены въ одно, потому что ученики навыкаютъ дѣлать разложеніе разсматриваемаго числа на слагаемыя сразу въ порядкѣ. Потомъ иногда знакомство съ новымъ числомъ можно производить и безъ наглядныхъ пособій, предлагая ученикамъ дѣлать разложеніе числа устно или письменно.

Всѣ упражненія при изученіи чиселъ перваго десятка сначала производятся безъ помощи цифръ и знаковъ дѣйствій, которые вводятся, когда уже весь десятокъ пройденъ, для повторенія всего пройденнаго, какъ это видно будетъ изъ самаго курса.

Не останавливаясь болѣе на подробномъ теоретическомъ выясненіи значенія и примѣненія всѣхъ перечисленныхъ упражненій съ видоизмѣ-

неніями, я считаю за болѣе удобное выяснить все это на практикѣ при изложеніи курса, къ которому теперь и перехожу.

Четыре. (Упражненіе на кубикахъ.)

Классная доска приспособляется такъ, чтобы на крючки, вбитые по бокамъ ея, можно было накладывать планки, на которыя выставляются кубики.

1) Образованіе числа.

На верхней планкѣ доски учитель ставитъ три кубика вмѣстѣ.

■ ■ ■

Сколько здѣсь кубиковъ? (Потомъ приставляетъ четвертый кубикъ). А теперь сколько?

■ ■ ■ ■

Какъ же составляются четыре кубика изъ трехъ и одного?
Нужно къ тремъ кубикамъ прибавить, приставить одинъ кубикъ.

2) Разложеніе на слагаемыя.

Какъ можно составить четыре кубика? или: Какъ четыре кубика можно разложить?
Четыре кубика можно разложить на два и два.

■ ■ ■ ■

Четыре кубика можно составить изъ одного, одного, одного и еще одного, или взять четыре раза по одному кубику.

■ ■ ■ ■

Четыре кубика можно разложить на три и одинъ.

■ ■ ■ ■

Можно составить изъ одного, одного и двухъ.

■ ■ ■ ■

Можно ли еще какъ нибудь иначе разложить четыре кубика? Ученики убѣждаются, что никакого другаго отличнаго отъ этихъ разложенія быть не можетъ. Если ученики станутъ еще разлагать четыре кубика такимъ образомъ: одинъ, два и одинъ, или два, одинъ и одинъ, или одинъ и три, то учителю легко имъ показать, что эти разложенія составляютъ повтореніе уже имѣющихся разложеній, только въ другомъ порядкѣ.

Всякій разъ, по указанію новаго пріема разложенія, предложеннаго учениками, учитель на одной изъ планокъ доски выставляетъ кубики въ

томъ видѣ, какъ они изображены здѣсь. Такимъ образомъ, въ нашемъ случаѣ на верхней планкѣ будутъ стоять четыре кубика вмѣстѣ, на второй два и два, на третьей четыре кубика раздѣльно на нѣкоторомъ разстояніи одинъ отъ другаго, на четвертой три и одинъ и на пятой одинъ, одинъ и два.

3) Разложеніе въ порядкѣ.

Весьма можетъ случиться, что дѣти сразу укажутъ разложеніе числа на слагаемыя въ порядкѣ; но и тогда третье упражненіе нельзя считать лишнимъ. Для установленія порядка въ разложеніи предлагаются классу такіе вопросы:

Вотъ вы составили четыре кубика изъ двоекъ, изъ отдѣльныхъ кубиковъ и изъ троекъ; въ какомъ порядкѣ лучше поставить намъ кубики на доскѣ? Съ чего начать разложеніе четырехъ кубиковъ? Съ разложенія на отдѣльные кубики.

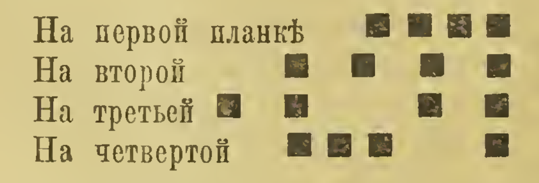
Какъ составить четыре кубика изъ отдѣльныхъ кубиковъ? Надо взять четыре раза по одному.

Какъ составить четыре кубика изъ двоекъ, изъ паръ?

Нужно взять двѣ двойки; два раза по два кубика; двѣ пары кубиковъ.

Какъ потомъ составить четыре кубика? Можно составить изъ троекъ; для этого взять три и одинъ, или одинъ и три.

Выясняется ученикамъ, что послѣднее разложеніе, то есть $1 + 1 + 2$, не подходитъ подъ принятый порядокъ и есть видоизмѣненіе одного изъ первыхъ трехъ. Такимъ образомъ, путемъ самаго разложенія числа на слагаемыя ученики сравниваютъ его съ 1, съ 2 и съ 3. Учитель во время разговора съ учениками располагаетъ постепенно на классной доскѣ эти разложенія уже въ порядкѣ, то есть:



Такъ какъ это упражненіе есть основное и самое важное при изученіи числа, то для закрѣпленія въ памяти учениковъ сдѣланныхъ разложеній имъ предлагаются упражненія письменныя на доскахъ или въ тетрадяхъ. Письменная работа учениковъ состоитъ въ разложеніи того же числа посредствомъ черточекъ, крестиковъ, кружковъ и проч. Кубики снимаются съ классной доски, и по требованію учителя: „возьмите ваши доски и разложите *четыре* посредствомъ крестиковъ такъ,

какъ мы разлагали на классной доскѣ четыре кубика", дѣти на память разлагаютъ четыре такимъ образомъ:

×	×	×	×		
×		×	×		×
×	×			×	×
×	×	×			×

Въ случаѣ ошибки, или безпорядка въ разложеніи, или наконецъ упущенія одного изъ разложеній, учитель поправляетъ учениковъ, провѣряя ихъ работу. Провѣрка эта производится такъ: обойдя классъ и познакомившись бѣгло съ работою каждаго, учитель ведетъ разговоръ съ классомъ. Кто кончилъ? Скажите такой-то, какое у васъ первое разложеніе? У кого первое разложеніе не такое? Какое второе разложеніе, третье? Отчего прежде надо разложить четыре на единицы, потомъ на двойки, тройки? При этомъ разложеніи есть порядокъ и нельзя пропустить ни одного разложенія, а если писать въ безпорядкѣ, то легко какое-либо разложеніе упустить.

Такой-то! сколькими способами разложили вы четыре? Тремя способами. Нѣтъ ли у кого еще четвертаго разложенія?

Затѣмъ одинъ ученикъ, по требованію учителя, читаетъ всѣ разложенія, примѣрно такъ: четыре состоитъ изъ одного, еще одного, еще одного и еще одного; четыре состоитъ изъ двухъ и двухъ; четыре состоитъ изъ трехъ и одного.

Если учитель замѣчаетъ, что есть нѣкоторые ученики, которые еще не вполнѣ усвоили составъ четырехъ, то, велѣвъ спрятать доски, онъ обращается ко всему классу и преимущественно къ этимъ ученикамъ съ вопросами: Изъ чего состоитъ четыре? Какъ составить четыре изъ кубиковъ, или крестиковъ, взятыхъ по два? Какъ составить четыре изъ единицъ? и т. п.

4) Выводы изъ предъидущаго упражненія.

Третье упражненіе, хорошо исполненное, положило прочное основаніе для всей дальнѣйшей работы съ числомъ. Послѣдующія упражненія состоятъ только въ расширеніи пониманія учениками сущности сдѣланныхъ ими разложеній числа, въ обобщеніи этихъ разложеній и въ упрощеніи самыхъ выраженій и пріемовъ вычисленій. Для выводовъ ученикамъ предлагаются слѣдующіе вопросы:

На сложеніе и вычитаніе. Сколько надо прибавить къ одному, чтобы получить четыре? Сколько къ двумъ, тремъ? Сколько будетъ два да два? Одинъ да три? Три да одинъ?

Сколько разъ отъ четырехъ можно отнять по одному? Сколько разъ по два, по три?

Сколько останется, если отъ четырехъ отнять одинъ, два, три?

Сколько единицъ не достаетъ одному, двумъ, тремъ до четырехъ?

Чѣмъ четыре больше одного, двухъ, трехъ?

Сколько останется, если отъ четырехъ отнять четыре раза по одному, два раза по два?

На умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ нужно взять по одному, по два, чтобы получить четыре? Сколько разъ нужно повторить два, чтобы составить четыре? Сколько будетъ дважды два? Четырежды одинъ?

Сколько разъ одинъ, два, четыре содержится въ четырехъ?

Во сколько разъ четыре больше одного, двухъ?

Какъ велика четвертая часть четырехъ, половина четырехъ?

Сколько получится, если взять въ два раза, въ четыре раза меньше четырехъ?

Такимъ образомъ, всѣ отношенія числа четыре къ предшествовавшимъ числамъ вытекаютъ сами собою изъ разложенія числа на слагаемыя и, слѣдовательно, изъ знакомства черезъ то учениковъ съ составомъ числа. Въ случаѣ затрудненія ученика въ отвѣтѣ на предложенный вопросъ, учитель пользуется кубиками для нагляднаго представленія ученику того, что его затруднило.

5) Задачи.

Задачи при изученіи чиселъ, какъ уже сказано, служатъ для приложенія узнаннаго учениками изъ предъидущихъ упражненій къ рѣшенію чисто практическихъ вопросовъ. Кромѣ того, рѣшеніемъ задачъ имѣется въ виду развитіе въ учащихся соображенія и выработка языка.

Совершенно достаточное собраніе задачъ, составленныхъ главнымъ образомъ для развитія соображенія учащихся и требующихъ приложенія самыхъ важныхъ отношеній изучаемаго числа къ другимъ, имѣется въ моемъ „Сборникѣ ариѳметическихъ задачъ и численныхъ примѣровъ для приготовительнаго и систематическаго курса“, часть 1-я. Задачи на числа первой сотни расположены въ „Сборникѣ“ въ 10 отдѣлахъ по десяткамъ чиселъ, а въ каждомъ отдѣлѣ расположены по возрастанію чиселъ, такъ что имѣется на каждое число по нѣскольку задачъ, стоящихъ въ рядъ. Въ задачахъ этихъ условія и данныя числа подобраны такъ, что требуютъ приложенія всѣхъ важнѣйшихъ отношеній изучаемаго числа къ числамъ предъидущимъ. Задачи по преимуществу сложныя, то-есть требующія для своего рѣшенія двухъ и болѣе дѣйствій. Въ случаѣ надобности

учитель самъ легко можетъ составлять во время урока простыя задачи, требующія для своего рѣшенія одного дѣйствія. Такихъ задачъ я не помѣщалъ въ „Сборникѣ“, такъ какъ онѣ послѣ предшествовавшихъ трехъ упражненій вовсе не нужны, а если бы и понадобились, то именно только для закрѣпленія въ памяти учащихся какого-либо особенно труднаго отношенія изучаемаго числа къ другому числу. Но трудность эта является во время урока, и составителю Сборника практическихъ упражненій нельзя предугадать всевозможныхъ частныхъ случаевъ, являющихся во время работы съ тѣмъ или другимъ ученикомъ. Учитель же составитъ простенькую задачу прямо примѣнимо къ данному случаю.

Задачи въ „Сборникѣ“, относящіяся къ числу четыре, слѣдующія: №№ 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Здѣсь мнѣ остается только изложить пріемъ рѣшенія задачи въ классѣ.

Задача. (Изъ Сборника № 8). Хозяйка купила двѣ пары подсвѣчниковъ и одинъ изъ нихъ сломала. Сколько цѣлыхъ подсвѣчниковъ осталось у хозяйки?

Учитель громко и раздѣльно читаетъ задачу. Одинъ изъ учениковъ повторяетъ ее. Если окажется, что нѣкоторые ученики не усвоили вполнѣ содержанія задачи, то классу предлагаются вопросы: О чемъ говорится въ задачѣ? О томъ, что хозяйка купила подсвѣчники. Сколько подсвѣчниковъ купила она? Двѣ пары. Что еще извѣстно о подсвѣчникахъ? Одинъ она сломала. Что спрашивается въ задачѣ? Сколько цѣлыхъ подсвѣчниковъ осталось у хозяйки?

Возстановивъ такимъ образомъ въ памяти учениковъ содержаніе задачи по частямъ, учитель опять требуетъ повторить ее всю въ цѣлости, чтобы части эти были между собою связаны. Послѣ этого учитель предоставляетъ ученикамъ рѣшать задачу и выжидаетъ, пока всѣ или многіе ученики поднятіемъ руки заявятъ о томъ, что они задачу рѣшили. Называя одного ученика, учитель спрашиваетъ, что онъ получилъ.

Отвѣтъ ученика. У хозяйки осталось три цѣлыхъ подсвѣчника.

Затѣмъ, не выражая своего одобренія или неодобренія по поводу полученнаго отвѣта, учитель спрашиваетъ то же у другаго, у третьяго и у прочихъ учениковъ, и только, переспросивши всѣхъ или многихъ, заявляетъ, что такой-то отвѣтъ вѣренъ. Для сокращенія времени при этомъ выспрашиваніи можно, получивши отвѣтъ одного ученика, спрашивать разомъ, кто еще получилъ такой же отвѣтъ; то же самое и по поводу другаго отвѣта, отличающагося отъ перваго.

Обыкновенно не всѣ ученики могутъ рѣшить задачу, и притомъ рѣшить ее вѣрно, особенно если учитель не можетъ удѣлить много вре-

мени на выжиданіе ея рѣшенія. Да если бы и всѣ рѣшили вѣрно, то иногда слѣдуетъ все-таки выспросить у учениковъ пріемъ рѣшенія задачи. Отвѣтъ ученика по этому поводу можетъ быть въ окончательномъ видѣ сформулированъ такъ: „Хозяйка купила двѣ пары подсвѣчниковъ, то-есть четыре подсвѣчника, потому что два раза по два будетъ четыре; одинъ подсвѣчникъ она сломала, значитъ цѣлыхъ осталось три, потому что четыре безъ одного будетъ три.“

Безъ сомнѣнія такую окончательную форму отвѣтъ можетъ принять только послѣ рѣшенія частныхъ вопросовъ, предлагаемыхъ классу учителемъ, каковы:

Что вы прежде всего высчитали? Сколько подсвѣчниковъ купила хозяйка.

Сколько же получилось? Четыре.

Какъ вы узнали, что ихъ было четыре? Было подсвѣчниковъ двѣ пары, что составляетъ четыре подсвѣчника.

Почему двѣ пары составляютъ четыре? Потому, что пара подсвѣчниковъ все равно что два, а два раза по два даетъ четыре.

Что вы узнали потомъ? Сколько цѣлыхъ подсвѣчниковъ осталось у хозяйки, когда она одинъ сломала.

Сколько же осталось? Три.

Какъ вы получили три? Хозяйка купила четыре подсвѣчника, одинъ сломала, а четыре безъ одного будетъ три.

Разскажите теперь все рѣшеніе задачи.

Излагая подробно пріемъ рѣшенія въ классѣ этой задачи, я вовсе не думаю сказать, что всѣ задачи должны быть разбираемы такъ подробно. Съ перваго раза достаточно бываетъ ограничиться однимъ отвѣтомъ числа со стороны учениковъ на вопросъ, поставленный въ задачѣ, не разбирая плана рѣшенія и вычисленій. Затѣмъ можно довольствоваться планомъ рѣшенія и числовыми отвѣтами на всѣ вспомогательныя неизвѣстныя, и только послѣ рѣшенія нѣсколькихъ задачъ можно начать требовать отъ учениковъ полнаго разсужденія при рѣшеніи задачи и высказыванія причины, на которой основано то или другое вычисленіе.

б) Бѣглое вычисленіе и вопросы, относящіеся къ числу отвлеченному.

а) *Вычисленіе въ формѣ задачъ.* Учитель предлагаетъ ученикамъ задачи сложныя по числу данныхъ чиселъ, но простыя по условіямъ, каковы:

Имѣя четыре яблока, я далъ двумъ мальчикамъ по одному яблоку, потомъ купилъ еще одно яблоко и съѣлъ самъ два. Сколько яблокъ у меня осталось?

Въ саду на скамейкѣ сидѣли три мальчика; къ нимъ подошелъ и сѣлъ еще мальчикъ. Сколько мальчиковъ осталось на скамейкѣ, если двѣ пары пошли гулять по саду?

Ученики вычисляютъ по мѣрѣ того, какъ учитель медленно читаетъ задачу, и по окончаніи вопроса задачи тотчасъ даютъ отвѣтъ, то-есть какимъ-либо условнымъ знакомъ заявляютъ, что число готово, а говоритъ его тотъ ученикъ, котораго назвалъ по имени учитель.

б) *Вычисленіе въ отвлеченномъ видѣ.* Учитель говоритъ:

Отъ четырехъ отнимаю три, потомъ прибавляю къ остатку два, отъ полученнаго числа отнимаю одинъ, къ полученному числу прибавляю еще два и все полученное дѣлю пополамъ. Сколько получилось у меня въ каждой половинѣ?

Или: беру два раза два, отнимаю три раза одинъ, къ полученному числу прибавляю два и отъ полученнаго числа отнимаю одинъ. Сколько разъ полученное число содержится въ четырехъ?

Опять-таки отвѣтъ учениковъ долженъ явиться тотчасъ по предложеніи вопроса учителемъ. Вѣрность и быстрота отвѣта учениковъ покажутъ въ этомъ случаѣ учителю, на сколько они овладѣли числомъ.

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ четыре раза одинъ? Одинождь четыре? Два раза два? Если взять трижды одинъ, то чего не достаетъ до четырехъ? Два сколько разъ содержится въ четырехъ? Половина четырехъ чѣмъ меньше трехъ? Сколько будетъ четыре безъ трехъ, безъ двухъ? Если отъ четырехъ отнять два, то полученное число во сколько разъ болѣе единицы? и т. п.

Пять.

Работа съ пуговками, жетонами, спичками или камешками *).

Беру это пособіе для классной работы потому, что оно требуетъ особеннаго пріема со стороны учителя. Работаютъ сами ученики; учитель только направляетъ работу.

1) Образованіе числа. Выньте ваши коробки. Достаньте по четыре пуговки и положите ихъ въ рядъ одну подлѣ другой. Приложите

---

*) *Палочки или спички*, отдѣльныя и связанныя въ пучки по десяткамъ, сотнямъ и тысячамъ. Пособіе это можетъ быть употребляемо при изученіи чиселъ первой сотни и при выясненіи нумераціи. При первоначальномъ знакомствѣ учениковъ съ долями единицы, они по указанію учителя разламываютъ спичку на требуемое число равныхъ частей. Вообще это, недорогое и легко приготовляемое въ самой школѣ, пособіе удобно потому, что его можно раздать на руки ученикамъ.

Коробка съ жетонами или пуговками, число которыхъ произвольно, замѣняетъ при разложеніи изучаемаго числа на слагаемыя черченіе на доскахъ кружковъ, крестиковъ и т. п.

еще по одной пуговкѣ въ тотъ же рядъ. Сколько получилось пуговокъ? Значитъ, какъ получить пять, имѣя уже четыре? Нужно къ четыремъ приложить еще одинъ.

2) Разложеніе на слагаемыя. Оставьте эти пять пуговокъ, выньте еще по пяти и разложите ихъ въ другомъ ряду, какъ нибудь иначе. Достаньте еще пять и разложите другимъ образомъ. Доставайте по пяти и разлагайте до тѣхъ поръ, пока можете разложить какимъ нибудь новымъ способомъ, только чтобы не было у кого изъ васъ два раза одного и того же разложенія.

При этой работѣ учениковъ учитель постоянно обходитъ классъ и наблюдаетъ какъ за порядкомъ въ классѣ, такъ и за правильнымъ исполненіемъ его требованій.

Всѣ возможныя разложенія въ безпорядкѣ, не считая перестановокъ слагаемыхъ, могутъ быть, напримѣръ, слѣдующія: $2+2+1$, $3+2$, $4+1$, $1+1+3$, $1+1+1+1+1$, $2+1+1+1$.

Для того, чтобы у всѣхъ были всѣ разложенія, учитель направляетъ работу такимъ образомъ: „Скажите такой-то, какъ вы разложили пять пуговокъ?“ Ученикъ читаетъ одно разложеніе. „У кого есть такой же рядъ?“ Имѣющіе его заявляютъ условнымъ знакомъ, а неимѣющіе, по требованію учителя, вынимаютъ изъ коробки пять пуговокъ и выполняютъ указанное разложеніе. „Такой-то! какой у васъ есть другой рядъ?“ Слѣдуетъ та же работа. Такимъ образомъ продолжается до тѣхъ поръ, пока у всѣхъ дѣтей на столахъ будутъ сдѣланы всѣ приведенныя выше разложенія въ какомъ угодно порядкѣ. Въ заключеніе одинъ ученикъ, по назначенію учителя, говоритъ всѣ разложенія въ томъ порядкѣ, въ какомъ они у него расположены, а прочіе провѣряютъ, не пропустилъ ли кто какого-либо изъ разложеній. *)

3) Разложеніе въ порядкѣ.

Теперь всѣ разложенія, сдѣланныя вами, приведемъ въ порядокъ. Какой же порядокъ выбрать? Изъ чего прежде составлять пять, изъ чего потомъ? Прежде составить изъ единицъ, потомъ изъ двоекъ, троекъ, четверокъ. Расположите ваши ряды въ этомъ порядкѣ, одинъ подъ другимъ.

---

*) *Примѣчаніе.* Не слѣдуетъ придавать значенія тому кажущемуся недоразумѣнію, что изучается число *пять*, а различныхъ разложеній является *шесть*, такъ что ученики какъ-бы невольно забѣгаютъ впередъ. Учитель не сдѣлаетъ вовсе ошибки, если, разсматривая съ дѣтьми число *пять*, спроситъ у нихъ «сколько разложеній они получили» и получитъ въ отвѣтъ «*шесть*». Одно другому нисколько не мѣшаетъ— счетъ самъ по себѣ, а всестороннее изученіе числа само по себѣ.

Дѣти располагаютъ ряды такъ: въ первомъ ряду пять пуговокъ одна подлѣ другой; этотъ рядъ всегда представляетъ изучаемое число въ цѣлости, какъ сумму; во второмъ ряду 1+1+1+1+1, въ третьемъ 2+2+1, въ четвертомъ 3+2 и въ пятомъ 4+1. При этомъ прежде бывшіе ряды 2+1+1+1 и 3+1+1 уничтожаются сами собою, такъ-какъ эти ряды смѣшанные и заключаются въ одномъ разложеніи 3+2, гдѣ пять сравнивается съ числомъ три.

Сколько теперь получилось рядовъ? Пять.

Что въ первомъ ряду? Само число пять.

Во второмъ? То же число, составленное изъ единицъ.

Въ третьемъ? То же число, составленное изъ двухъ, двухъ и одного.

Въ четвертомъ? Пять, составленное изъ трехъ и двухъ.

Въ пятомъ? Пять, составленное изъ четырехъ и одного.

Почему у васъ получилось пять рядовъ, а не больше и не меньше? Почему при разложеніи нами *четырехъ* получилось четыре ряда?

Такіе вопросы предлагаются дѣтямъ для того, чтобы они замѣтили, что число рядовъ всегда равно изучаемому числу, что въ первомъ ряду всегда должно заключаться само число въ цѣлости, а число прочихъ рядовъ прямо опредѣляется числомъ всѣхъ предшествующихъ чиселъ, съ которыми изучаемое число сравнивается. Такъ при изученіи пяти выходитъ четыре ряда, потому что чиселъ, съ которыми пять сравнивается, всего четыре: 1, 2, 3 и 4. Обдумывая свои отвѣты на эти вопросы и составляя ихъ на основаніи рядовъ, находящихся у нихъ предъ глазами, дѣти замѣчаютъ также самый порядокъ разложенія числа и мало-по-малу привыкаютъ разложенія слѣдующихъ чиселъ дѣлать сразу въ порядкѣ.

Затѣмъ идетъ упражненіе на доскахъ или въ тетрадяхъ. Дѣти, убравъ всѣ пуговки въ коробки, по требованію учителя, берутъ доски, и воспроизводятъ на нихъ тѣ же разложенія посредствомъ кружковъ такимъ образомъ:

○○○○○
○ ○ ○ ○ ○
○○ ○○ ○
○○○ ○○
○○○○ ○

Учитель осматриваетъ работу учениковъ, а одинъ изъ нихъ читаетъ всѣ сдѣланныя имъ разложенія. Наблюдается, чтобы всѣ ученики непремѣнно воспроизвели всѣ разложенія и въ порядкѣ.

Вопросы: „Изъ чего сначала составили пять? Изъ чего потомъ? Въ чемъ же тутъ замѣчается порядокъ?“ Сначала пять составляется изъ

отдѣльныхъ кружковъ, изъ единицъ, потомъ изъ двоекъ, потомъ изъ троекъ, четверокъ. Въ какомъ порядкѣ идутъ числа, въ такомъ же порядкѣ идутъ и ряды.

4) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Сколько нужно прибавить къ одному, двумъ, тремъ, четыремъ, чтобы получить пять?

Изъ какихъ чиселъ можно составить пять?

На какія мелкія монеты можно размѣнять пятачокъ?

Сколько получится, если отъ пяти отнять два, четыре, одинъ, три?

Чего не достаетъ одному, тремъ до пяти?

Какое число нужно отнять два раза отъ пяти, чтобы остался одинъ?

Какое число еще можно отнять два раза отъ пяти и что останется?

Какое число нужно отнять отъ пяти, чтобы осталось два?

Пять чѣмъ больше двухъ, трехъ, одного?

Сколько получится, если пять уменьшить двумя, четырьмя единицами?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ нужно взять по одному, чтобы получить пять?

Во сколько разъ пять больше одного?

Сколько разъ одинъ содержится въ пяти.

Сколько разъ два, три, четыре содержится въ пяти и сколько еще остается?

Какъ велика пятая часть пяти?

Сколько дадутъ булокъ на пять копеекъ, если каждая булка стоитъ двѣ копейки и сколько получится сдачи?

Какъ можно раздать пять грушъ тремъ мальчикамъ?

Отвѣтъ: одному мальчику одну грушу, другимъ двумъ по двѣ; одному мальчику три груши, другимъ двумъ по одной.

Примѣчаніе. Нужно заботиться о томъ, чтобы изученіе новаго числа начиналось сначала урока, такъ чтобы возможно было разложить число и сдѣлать выводы изъ этихъ разложеній. Тогда уже въ слѣдующій урокъ можно продолжать другія упражненія, основанныя на этихъ выводахъ. Иначе, не закрѣпивъ выводами работы учениковъ на наглядныхъ пособіяхъ, пришлось бы ту же работу начинать въ слѣдующій урокъ снова.

5) Задачи.

№№ 13, 14, 15, 16 и 17.

6) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Нищій собралъ утромъ пять копеекъ и купилъ на двѣ коп. хлѣба и на одну коп. квасу, потомъ вечеромъ еще получилъ

двѣ копейки и снова издержалъ три. Сколько денегъ осталось у нищаго отъ собранныхъ въ этотъ день?

Въ комнатѣ у одной стѣны стояло два стула, а у другой три; изъ комнаты вынесли четыре стула для починки, а внесли три и поставили всѣ стулья у обѣихъ стѣнъ поровну. Сколько теперь стульевъ у каждой стѣны?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ пяти отнимаю три, потомъ придаю два раза по одному; полученное число дѣлю пополамъ и къ одной половинѣ прибавляю одинъ. Сколько получилось?

Беру два раза два; прибавляю одинъ; отъ полученнаго числа отнимаю четыре; полученное число увеличиваю въ три раза и отнимаю отъ него два. Сколько остается?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ три да два? Четыре да одинъ? Пять безъ двухъ? Пять безъ трехъ? Пять безъ одного и трехъ? Сколько нужно прибавить къ половинѣ четырехъ, чтобы получить пять? Чѣмъ пять безъ двухъ меньше четырехъ? и т. д.

Шесть.

1) Образованіе числа.

Работа на классныхъ большихъ счетахъ. *) На шесть проволокъ классныхъ счетовъ надѣвается передъ урокомъ по шести шаровъ на каждую. Съ одного конца верхней проволоки учитель передвигаетъ на другой пять шаровъ и прибавленіемъ къ нимъ еще одного шара образуетъ шесть.

2) Разложеніе на слагаемыя.

Послѣ изученія чиселъ *четыре* и *пять*, при которомъ дѣти, производя сначала разложеніе въ разбивку и приводя его потомъ

---

*) *Ариѳметическіе счеты.* Въ четыреугольной рамкѣ, стоящей на высокихъ ножкахъ, продѣто 10 или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, на каждой изъ которыхъ находится по десяти одинаковой величины деревянныхъ шаровъ, свободно двигающихся по этимъ проволокамъ; если 10 шаровъ сдвинуть на одинъ конецъ проволоки, то они занимаютъ менѣе половины ея и слѣдовательно удобно могутъ быть распредѣлены на всей проволокѣ по одному, попарно и т. д. На верхнемъ брускѣ рамки утверждено нѣсколько вертикальныхъ проволокъ такой длины, что на каждой изъ нихъ помѣщается ровно 10 шаровъ такихъ, какъ на горизонтальныхъ проволокахъ. Какъ горизонтальныя, такъ и вертикальныя проволоки вывинчиваются, и на первыя можно надѣвать, въ случаѣ надобности, и больше десяти шаровъ. Внизу рамки придѣланъ ящикъ, въ которомъ помѣщаются шары, снимаемые съ проволокъ, а также шары, служащіе для запаса.

Счеты эти служатъ для изученія чиселъ первой сотни, для выясненія ученикамъ нумераціи и пріема написанія большихъ чиселъ, а также для пріученія вообще пользоваться торговыми счетами при вычисленіяхъ. Въ виду послѣдней цѣли при классныхъ счетахъ имѣются и черные шары, которые надѣваются по два на каждую проволоку въ серединѣ между восемью желтыми—для нагляднаго раздѣленія пятковъ.

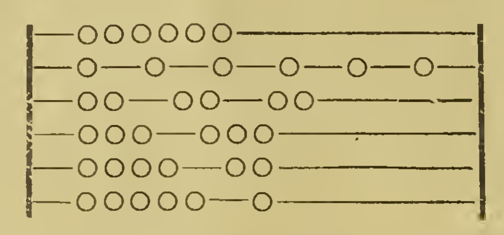
въ систему, поняли основной пріемъ этихъ разложеній, можно уже миновать разложеніе числа въ разбивку и перейти прямо къ разложенію въ порядкѣ. Для этого служатъ слѣдующіе вспомогательные вопросы:

Если будемъ разлагать *шесть* въ извѣстномъ намъ порядкѣ, то сколькими способами можно его разложить? Пятью.

Почему пятью? Потому что шесть можно составить посредствомъ каждаго изъ пяти предъидущихъ чиселъ, то-есть 1, 2, 3, 4, 5.

Въ какомъ же порядкѣ будете разлагать шесть шаровъ? Сначала на отдѣльные шары (единицы), потомъ на двойки, тройки и т. д.

Учитель вызываетъ къ счетамъ одного ученика для разложенія шести шаровъ, находящихся на второй проволокѣ, на отдѣльные шары, другаго — на двойки, третьяго — на тройки и т. д. до тѣхъ поръ, пока всѣ пять разложеній будутъ сдѣланы. Получаются на счетахъ такія разложенія:



Такія же разложенія шести производятся учениками на доскахъ посредствомъ какихъ-либо значковъ, то-есть кружковъ, черточекъ или крестиковъ. Работа на доскахъ повѣряется учителемъ или посредствомъ осмотра ея, или посредствомъ разговора съ учениками по поводу сдѣланныхъ разложеній.

3) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Какъ составить шесть изъ единицъ? Нужно къ одной единицѣ прибавить еще одну, получится два; къ двумъ прибавить еще одну единицу, получится три, и т. д. до шести.

Какъ составить число шесть изъ двоекъ, троекъ, четверокъ, пятерокъ?

Изъ какихъ трехъ равныхъ чиселъ составляется число шесть? Изъ трехъ двоекъ.

Изъ какихъ двухъ равныхъ? Изъ двухъ троекъ.

Изъ какихъ еще равныхъ чиселъ можно составить шесть? Изъ шести единицъ.

Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ четырехъ и двухъ, или изъ пяти и одного.

Сколько надо прибавить къ двумъ, темъ, четыремъ, чтобы получить шесть?

Сколько разъ отъ шести можно отнять по одному? Отнимайте отъ шести по одному, по два.

Сколько будетъ шесть безъ трехъ, четырехъ, пяти? Двумъ, тремъ, четыремъ чего не достаетъ до шести?

Чѣмъ шесть больше трехъ, пяти?

На сколько единицъ шесть больше двухъ, четырехъ?

Сколько получится, если шесть уменьшить тремя, четырьмя, пятью единицами?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько будетъ: два раза три, три раза два?

Сколько разъ въ шести содержится одинъ, два, три, шесть? Сколько разъ въ шести содержится четыре, пять? (Четыре содержится одинъ разъ и еще остается отъ шести два, а пять содержится одинъ разъ и еще остается отъ шести одинъ.)

Во сколько разъ шесть больше одного, двухъ, трехъ?

Сколько получится, если шесть уменьшить въ два раза, въ три раза, въ шесть разъ?

Какъ велика половина, треть, шестая часть шести?

Какое число въ два, три, шесть разъ меньше шести?

Въ заключеніе можно предлагать вопросы неопредѣленные, въ родѣ: „Сколькимъ мальчикамъ можно раздать шесть яблокъ?“ *Отвѣтъ:* Шести по одному яблоку; тремъ по два; двумъ по три; одному два и другому четыре; двумъ по одному и двумъ по два; одному пять и другому одно, и т. д. На рѣшеніи такихъ вопросовъ повторяются сразу всѣ разложенія числа на слагаемыя и множители.

4) Задачи.

№№ 18, 19, 20, 21, 22, 23 и 24.

Задача. (Изъ Сборника № 22). Въ одномъ карманѣ у меня два орѣха, а въ другомъ въ два раза болѣе. Сколько орѣховъ нужно переложить изъ втораго кармана въ первый, чтобы въ обоихъ карманахъ орѣховъ было поровну?

Усвоеніе содержанія задачи. О чемъ говорится въ задачѣ? Въ сколькихъ карманахъ у меня орѣхи? Что сказано о числѣ орѣховъ въ первомъ и второмъ карманѣ? Что требуется сдѣлать съ этими орѣхами? Что ищется въ задачѣ? Повторите всю задачу. Рѣшайте.

Когда многіе ученики рѣшили задачу и дали отвѣтъ, всему классу, а преимущественно нерѣшившимъ задачу, или рѣшившимъ ее невѣрно, предлагаются вопросы:

Что ищется въ задачѣ? Сколько орѣховъ нужно переложить изъ втораго кармана въ первый, чтобы въ обоихъ было поровну.

Что для этого надо узнать? Сколько орѣховъ во второмъ карманѣ.

Что же мы знаемъ изъ задачи, чтобы высчитать, сколько орѣховъ во второмъ карманѣ? Мы знаемъ, что въ первомъ карманѣ два орѣха, а во второмъ въ два раза болѣе.

Итакъ, сколько орѣховъ во второмъ карманѣ? Четыре.

Почему четыре? Потому что два раза два будетъ четыре.

Что теперь надо узнать? По скольку орѣховъ надо положить въ каждый карманъ, чтобы въ обоихъ было поровну?

Что надо для этого вычислить? Надо вычислить, сколько орѣховъ въ обоихъ карманахъ, и потомъ распредѣлить ихъ пополамъ.

По скольку же орѣховъ приходится въ каждомъ карманѣ? По три, потому что въ обоихъ карманахъ четыре да два, что составитъ шесть орѣховъ, а половина шести равна тремъ.

Сколько надо переложить изъ втораго кармана въ первый? Одинъ.

Какъ это высчитать? Во второмъ четыре орѣха, а должно быть три, чтобы въ обоихъ карманахъ было поровну, значитъ тамъ одинъ лишній орѣхъ и его надо переложить въ первый карманъ.

По скольку тогда орѣховъ будетъ въ каждомъ карманѣ? По три, потому что во второмъ было четыре, а если взять оттуда одинъ орѣхъ, то тамъ останется три; придавъ этотъ орѣхъ къ тѣмъ двумъ, которые находятся въ первомъ карманѣ, получимъ и тамъ три орѣха.

Послѣ этого, если дѣти получили уже навыкъ хорошо и послѣдовательно выражаться на рѣшеніи предшествовавшихъ задачъ, можно потребовать отъ нихъ полнаго изложенія рѣшенія задачи, которое должно выразиться примѣрно въ такомъ видѣ: „Въ одномъ карманѣ два орѣха, а въ другомъ въ два раза болѣе, а два раза два даетъ четыре; значитъ, во второмъ карманѣ четыре орѣха. Четыре да два составляетъ шесть; значитъ, въ обоихъ карманахъ шесть орѣховъ. Половина шести будетъ три; слѣдовательно, въ каждомъ карманѣ должно быть по три орѣха, чтобы было поровну. Четыре безъ трехъ будетъ одинъ; значитъ во второмъ карманѣ одинъ орѣхъ лишній, который надо переложить въ первый карманъ.“

Такое изложеніе высказывается не однимъ ученикомъ, а по частямъ двумя, тремя учениками; только впослѣдствіи, когда ученики привыкнутъ вести полное разсужденіе и вычисленіе при рѣшеніи задачи, можно отъ одного ученика требовать полнаго изложенія всего рѣшенія.

5) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Въ одномъ карманѣ у меня было шесть орѣховъ;

я переложилъ оттуда въ другой карманъ сначала два и потомъ еще три орѣха, а къ тѣмъ, которые остались, прибавилъ новыхъ четыре. Сколько теперь орѣховъ у меня въ каждомъ карманѣ?

У мальчика было три монеты по двѣ копейки; онъ купилъ три сухаря, заплативъ за каждый по одной копейкѣ, потомъ отъ матери получилъ еще одну монету въ двѣ коп. и одну въ одну копейку; половину всѣхъ своихъ денегъ онъ отдалъ бѣдному. Сколько копеекъ осталось у мальчика?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ двумъ прибавляю одинъ и еще три; полученное число дѣлю пополамъ; къ одной половинѣ прибавляю еще одинъ и снова дѣлю пополамъ. Сколько теперь получилось въ каждой половинѣ?

Къ третьей части шести прибавлю половину шести и еще шестую часть шести; отъ полученнаго числа отниму четыре и оставшееся число увеличу въ два раза. Сколько получится?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ дважды три, трижды два, шестью одинъ? Половина шести во сколько разъ больше шестой его части? Чѣмъ половина шести больше его трети? Что больше: треть шести или половина четырехъ? Какое число содержится два раза въ четырехъ и три раза въ шести? Какія числа содержатся въ шести безъ остатка? На какія равныя части можно раздѣлить шесть? и т. п.

Семь.

1) Образованіе числа.

Работа безъ нагляднаго пособія. Если на скамейкѣ сидятъ шесть мальчиковъ и къ нимъ посадить еще одного, то сколько тогда будетъ мальчиковъ на скамейкѣ?

Считайте отъ одного до семи. Считайте назадъ отъ семи до одного. Считайте отъ одного до семи черезъ одинъ. Считайте назадъ черезъ два.

2) Разложеніе.

Какъ я могу раздать семь орѣховъ семи мальчикамъ поровну? Каждому по одному орѣху.

А если ихъ будетъ шесть? Пяти по одному и шестому два.

А если пять? Четыремъ по одному и пятому три; или тремъ по одному и двумъ по два.

А если четыре? Тремъ по одному и четвертому четыре; или двумъ по одному, третьему два и четвертому три; или тремъ по два и четвертому одинъ.

А если три? и т. д.

Какъ составить число семь изъ предшествующихъ чиселъ въ порядкѣ? Нужно взять семь разъ по одному, три раза по два и одинъ, два раза по три и одинъ, четыре и три, пять и два, шесть и одинъ.

Возьмите ваши доски и разложите семь въ этомъ порядкѣ посредствомъ крестиковъ. (Такое письменное разложеніе вначалѣ необходимо, хотя бы ученики давали вполнѣ обстоятельные отвѣты на предшествовавшіе вопросы: нужно, чтобы *каждый* ученикъ усвоилъ разложеніе, а это учителю виднѣе, когда каждый исполнитъ разложеніе письменно.)

Ученики на доскахъ составляютъ такую табличку:

```
×××××××
×  ×  ×  ×  ×  ×  ×
××  ××  ××  ×
×××  ×××  ×
××××  ×××
×××××  ××
××××××  ×
```

Затѣмъ идетъ повѣрка табличекъ, составленныхъ учениками, и приведеніе разложеній въ порядокъ у тѣхъ учениковъ, которые этого порядка не соблюли.

3) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Какъ составляется число семь изъ единицъ, двоекъ, троекъ? и т. д.

Сколько надо прибавить къ двумъ, четыремъ, шести, чтобы получить семь?

На сколько надо увеличить три, пять, чтобы получить семь?

Какія числа надо сложить вмѣстѣ, чтобы составилось семь?

Изъ какихъ двухъ чиселъ составляется семь?

Сколько получится въ остаткѣ, если отъ семи отнять одинъ, три, пять?

Сколько получится, если семь уменьшить на двѣ, четыре, шесть единицъ?

Чѣмъ семь больше трехъ, четырехъ, пяти?

На сколько единицъ семь больше двухъ, трехъ, четырехъ?

Сколько будетъ семь безъ двухъ, безъ трехъ, безъ пяти?

Какое число меньше семи двумя, пятью, тремя единицами?

Умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ надо взять по одному, чтобы получить семь?

На сколько семь больше двухъ, взятыхъ три раза, трехъ, взятыхъ два раза?

Какія числа содержатся въ семи безъ остатка? На сколько равныхъ частей можно раздѣлить семь?

Сколько разъ два, три, четыре содержится въ семи и сколько еще остается?

Изъ какихъ монетъ можно составить семь копеекъ?

4) Задачи. №№ 25, 26, 27 и 28.

Задача. (Изъ Сборника № 27). У мальчика были двѣ монеты по три копейки и одна монета въ одну копейку; двѣ копейки онъ истратилъ на покупку карандаша, а на всѣ остальныя деньги купилъ нѣсколько грушъ и за каждую грушу заплатилъ по копейкѣ. Сколько грушъ купилъ мальчикъ?

Планъ рѣшенія. Нужно узнать сперва, сколько было у мальчика денегъ, потомъ сколько истратилъ онъ изъ нихъ на груши и, наконецъ, сколько купилъ грушъ.

Рѣшеніе. У мальчика было двѣ монеты по три копейки, или 6 коп., потому что два раза три будетъ шесть; да еще одна монета въ одну копейку; значитъ, у него было денегъ семь копеекъ, потому что шесть да одинъ будетъ семь. Онъ истратилъ на покупку карандаша двѣ копейки; значитъ, у него оставалось пять коп., потому что семь безъ двухъ будетъ пять. На пять коп. онъ купилъ грушъ, платя по одной коп. за каждую; слѣдовательно, онъ купилъ пять грушъ, потому что одинъ содержится въ пяти пять разъ.

5) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У отца было четыре яблока и онъ купилъ еще три; два яблока онъ самъ съѣлъ, одно отдалъ дочери, а остальныя раздѣлилъ поровну между двумя сыновьями. Сколько яблокъ получилъ каждый сынъ?

По улицѣ шли мальчики: впереди одинъ и еще три ряда по два; потомъ они размѣстились всѣ въ два ряда такъ, что въ первомъ было четыре мальчика, а во второмъ остальные. Сколько мальчиковъ было во второмъ ряду?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ двумъ прибавить четыре, отнять отъ полученнаго числа три, прибавить еще одинъ; полученное число раздѣлить пополамъ, половину увеличить въ три раза и прибавить еще одинъ. Сколько получилось?

Отъ семи отнять четыре; полученное число увеличить въ два раза; взять третью часть полученнаго числа и прибавить къ ней два. На сколько полученное число меньше семи?

в) *Вопросы для повторенія.* Семью одинъ сколько будетъ? Какое число нужно повторить три раза, чтобы, прибавивши одинъ, получить семь? Какое число, повторенное два раза, единицею меньше семи? Сколько надо отнять отъ семи, чтобы половина оставшагося числа равнялась двумъ? Сколько надо отнять отъ семи, чтобы треть оставшагося числа была половиною четырехъ? и т. д.

Восемь.

Такъ какъ образованіе новаго числа всегда производится прибавленіемъ единицы къ числу предшествовавшему, то съ этого числа я не буду уже вводить отдѣльнаго описанія этого упражненія. Скажу только, что послѣ образованія числа прибавленіемъ единицы полезно упражнять учениковъ въ счетѣ прямомъ и обратномъ въ порядкѣ чиселъ, а также черезъ одну, двѣ, три единицы. Такимъ образомъ для чиселъ 8, 9 и 10 я вкратцѣ только намѣчу упражненія подъ четырьмя отдѣлами:

1) Разложеніе числа. 2) Выводы изъ разложенія. 3) Задачи. 4) Бѣглое вычисленіе.

1) Разложеніе числа.

Въ такомъ же порядкѣ, какъ и прежде, дѣти разлагаютъ число 8 на слагаемыя. Это разложеніе производится или при посредствѣ наглядныхъ пособій, каковы: кубики, шары на счетахъ, жетоны, пуговки, спички, камешки, или прямо, безъ нагляднаго пособія, какъ это было показано въ числѣ семь. Потомъ это разложеніе воспроизводится письменно на доскахъ, причемъ слѣдуетъ вызвать одного изъ учениковъ къ классной доскѣ—дѣлать разложеніе восьми въ порядкѣ; по его работѣ всѣ другіе могутъ привести въ порядокъ свои разложенія, или пополнить пропущенныя. Такимъ образомъ, разложеніе, если его перевести на обыкновенное обозначеніе, выразится въ слѣдующихъ рядахъ:

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$8 = 2 + 2 + 2 + 2$$
$$8 = 3 + 3 + 2$$
$$8 = 4 + 4$$
$$8 = 5 + 3$$
$$8 = 6 + 2$$
$$8 = 7 + 1$$

На закрѣпленія въ памяти этого разложенія нужно остановиться подольше при повѣркѣ работы учениковъ, потому что число 8 представ-

ляетъ въ этомъ случаѣ больше матеріала для выводовъ, нежели предшествовавшія числа.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ чиселъ складывается восемь? (На этотъ вопросъ въ своихъ отвѣтахъ ученики повторяютъ всѣ разложенія восьми на слагаемыя.)

Изъ какихъ равныхъ чиселъ составляется восемь?

Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ какихъ трехъ чиселъ?

Сколько надо придать къ тремъ, шести, чтобы получить восемь?

Сколько получится, если отъ восьми отнять два? Сколько разъ можно отнять отъ восьми по два?

Сколько получится, если отъ восьми отнять три, и сколько разъ можно отнять по три?

Восемь безъ одного, безъ четырехъ, безъ шести?

Уменьшить восемь тремя, пятью, семью единицами.

Какое число двумя, четырьмя единицами меньше восьми?

Восемь чѣмъ больше одного, трехъ, шести?

Умноженіе и дѣленіе. Какое число въ четыре раза больше двухъ?

Если четыре повторить два раза, то сколько получится?

Сказать число въ восемь разъ большее одного.

Сколько будетъ дважды четыре, четырежды два, восемью одинъ?

Сколько разъ въ восьми содержится одинъ, два, четыре?

Сколько разъ въ восьми содержится три, пять и сколько получается въ остаткѣ?

Какое число получится, если восемь уменьшить въ два, въ четыре раза?

Во сколько разъ восемь больше одного, двухъ, четырехъ?

Какъ велика половина, четверть, восьмая часть восьми?

На какія равныя части можно раздѣлить восемь?

Какія числа содержатся въ восьми безъ остатка?

3) Задачи.

№№ 29, 30, ... 39.

Задача. (Изъ Сборника № 30). Одинъ мальчикъ получилъ отъ отца пять копеекъ, а другой двумя копейками менѣе; на всѣ эти деньги они купили четыре яблока по одинаковой цѣнѣ. Сколько заплатили они за каждое яблоко?

Вопросы для установленія плана рѣшенія, исходя отъ главной неизвѣстной въ задачѣ. Что ищется въ задачѣ? Сколько заплатили мальчики за каждое яблоко.

Что надо знать, чтобы высчитать цѣну одного яблока? Надо знать, сколько стоютъ четыре яблока.

Что надо опредѣлить, чтобы узнать, сколько стоютъ четыре яблока? Надо узнать, сколько денегъ получили два мальчика вмѣстѣ.

Что для этого остается вычислить? Надо вычислить, сколько денегъ получилъ второй, такъ какъ мы знаемъ, что первый получилъ пять копеекъ.

Итакъ, скажите въ порядкѣ, что надо вычислить прежде, что потомъ? Прежде надо вычислить, сколько денегъ получилъ второй мальчикъ, потомъ сколько денегъ составилось у обоихъ и, наконецъ, сколько заплатили мальчики за каждое яблоко.

Задачи, предлагаемыя въ классѣ, заключаютъ въ себѣ живой матеріалъ для упражненія мышленія ученика, для вывода математическихъ правилъ и для упражненія въ приложеніи этихъ правилъ къ рѣшенію частныхъ практическихъ вопросовъ. А потому подборъ задачъ долженъ быть строго систематическій. (Система расположенія задачъ съ достаточною подробностью выяснена въ предисловіяхъ, находящихся при обѣихъ частяхъ моего «Сборника ариѳметическихъ задачъ для приготовительнаго и систематическаго курса»; распредѣленіе же задачъ при прохожденіи курса и пользованіе ими видно изъ самаго курса, гдѣ при каждой статьѣ называются отдѣлы соотвѣтствующихъ въ «Сборникѣ» задачъ).

На первомъ планѣ въ задачѣ ставится ея содержаніе, потомъ число и его свойство, а не дѣйствія, необходимыя для рѣшенія задачи. Дѣйствіе вытекаетъ изъ самаго соотношенія данныхъ въ задачѣ чиселъ и указывается ученикамъ тогда, когда они по условіямъ задачи открыли связь между данными числами. Названіе дѣйствія только тогда получитъ для ученика значеніе, когда онъ увидитъ необходимость совершенія его для рѣшенія задачи. Выдѣленіе дѣйствій и подробное изученіе ихъ вмѣстѣ съ свойствами чиселъ, въ нихъ входящихъ, можетъ послѣдовать уже послѣ пріобрѣтенія ученикомъ способности дѣлать отвлеченія, не впадая въ механизмъ. Тогда, переходя отъ задачъ къ выводамъ и обобщеніямъ, можно упражнять учениковъ въ примѣненіи этихъ выводовъ на механическомъ вычисленіи и тѣмъ закрѣплять самые выводы въ памяти учениковъ. А потому въ началѣ обученія, при изученіи чиселъ первой сотни, нѣтъ надобности дѣлать подборъ задачъ для выдѣленія дѣйствій. Каждая задача для рѣшенія своего должна требовать не одного дѣйствія, а двухъ и болѣе, и заключать въ себѣ наиболѣе существенныя свойства изучаемаго числа.

На первыхъ порахъ прохожденія курса Ариѳметики рѣшеніе задачи естественнѣе и легче вести отъ *чиселъ данныхъ къ искомому*, что для ученика яснѣе и понятнѣе; впослѣдствіи полезно исподоволь переходить къ рѣшенію обратному, то-есть исходя отъ искомаго и опредѣляя его связь съ числами данными въ задачѣ. Для уясненія этого вопроса привожу примѣръ рѣшенія одной и той же задачи на число 8 по двумъ пріемамъ.

Задача. (Изъ Сборника № 32). Одна курица снесла въ теченіи недѣли три яйца, а другая двумя яйцами болѣе; всѣ эти яйца сварили, подали на завтракъ дѣтямъ и каждому дали по два яйца. Сколько дѣтей завтракало?

Первый пріемъ рѣшенія. Одна курица снесла 3 яйца, а другая двумя болѣе; значитъ вторая курица снесла 3 да 2, то-есть 5 яицъ. Обѣ курицы снесли въ теченіи недѣли 3 да 5, то-есть 8 яицъ. Каждому изъ дѣтей за завтракомъ дали 2 яйца, значитъ дѣтей было 4, потому что 2 содержится въ 8-ми 4 раза.

Второй пріемъ. Требуется узнать, сколько дѣтей завтракало. Для этого надо знать, сколько было подано яицъ, которыя роздали дѣтямъ по два. Чтобы узнать число поданныхъ яицъ, надо опредѣлить, сколько яицъ снесли обѣ курицы въ теченіи недѣли, а для этого надо прежде сосчитать, сколько яицъ снесла вторая курица. Итакъ, прежде всего узнаемъ, что вторая курица снесла 3 да 2 яйца, то-есть 5 яицъ, а обѣ 3 да 5, то-есть 8 яицъ. Значитъ за завтракомъ подали 8 яицъ и каждому дитяти дали по 2 яйца; слѣдовательно дѣтей завтракало 4, потому что 8 состоитъ изъ четырехъ двоекъ или паръ.

Замѣна одного пріема рѣшенія задачи другимъ служитъ однимъ изъ сильнѣйшихъ орудій развитія соображенія. Переходъ отъ перваго пріема рѣшенія ко второму производится постепенно и легко, если учащіеся, рѣшая задачи по первому пріему, получили навыкъ удерживать въ памяти все содержаніе задачи и составили отчетливое понятіе о значеніи чиселъ, данныхъ въ задачѣ, чиселъ искомыхъ, и о связи однихъ съ другими посредствомъ условій, выраженныхъ содержаніемъ задачи.

При рѣшеніи задачъ хорошимъ средствомъ для развитія учениковъ служитъ разнообразіе способовъ рѣшенія одной и той же задачи и подыскиваніе простѣйшаго изъ нихъ. Но учителю нужно быть очень осторожнымъ, чтобы не запутать слабыхъ учениковъ этимъ разнообразіемъ, и потому каждый новый способъ рѣшенія долженъ слѣдовать тогда, когда прежній былъ классу достаточно уясненъ. Само собою разумѣется, что пріисканіе различныхъ способовъ рѣшенія должно исходить отъ самихъ учениковъ при помощи наводящихъ вопросовъ учителя. Навыкъ въ такомъ упражненіи развиваетъ быстроту соображенія; развитые хорошо ученики предлагаютъ часто такое разнообразіе пріемовъ разсужденія при рѣшеніи какой-либо задачи, которое при задаваніи иногда не приходитъ и на мысль учителю.

Только значительный опытъ и пониманіе цѣли и средствъ преподаванія Ариѳметики могутъ дать преподавателю средство удачно и сообразно съ цѣлію составлять быстро во время урока задачи, какъ необходимый матеріалъ при прохожденіи курса. Всего труднѣе подбирать содержаніе задачи: легко очень надоѣсть классу, предлагая задачи съ пустымъ содержаніемъ, вращающимся около понятій «купилъ», «продалъ» и т. п. Естественнѣе всего выбирать содержаніе задачи изъ сферы, окружающей ученика, примѣняясь къ эго понятіямъ и видоизмѣняя это содержаніе, по мѣрѣ развитія ученика. Также важенъ подборъ въ задачахъ условій и данныхъ чиселъ сообразно съ цѣлію преподаванія и съ постепенностью проходимаго курса. Здѣсь легко забѣжать впередъ и запутать ученика, вводя въ задачи данныя числа, превышающія предѣлъ, около

котораго мысль ученика привыкла вращаться. Для избѣжанія этого учителю слѣдуетъ являться въ классъ съ готовымъ матеріаломъ. Такой готовый матеріалъ по всѣмъ отдѣламъ элементарнаго и систематическаго курса Ариѳметики учитель найдетъ въ моемъ «Сборникѣ ариѳметическихъ задачъ».

Предложеніе и рѣшеніе задачи. Задачи, служащія для изученія свойствъ и состава чиселъ, для вывода правилъ, открытія и усвоенія математическихъ истинъ, для послѣдовательнаго развитія соображенія учениковъ и для повторенія пройденнаго курса, бываютъ двухъ родовъ: *устныя* и *письменныя.* Здѣсь я приведу, на сколько возможно, только общіе пріемы предложенія учителемъ и хода рѣшеній учениками задачъ устныхъ и образецъ катихизаціи при рѣшеніи одной задачи по двумъ приведеннымъ выше пріемамъ; частности же или видоизмѣненія пріема катихизаціи при рѣшеніи задачъ, относящихся къ различнымъ отдѣламъ курса, приведены въ самомъ курсѣ.

Въ началѣ обученія дѣти пріучаются держать въ памяти не только содержаніе предлагаемой задачи, но и данныя числа, которыя поэтому не слѣдуетъ записывать. Запоминаніе это облегчается тѣмъ, что содержаніе и числа задачи отличаются на этой ступени обученія простотою. Впослѣдствіи, съ усложненіемъ содержанія задачъ и съ возрастаніемъ числа, если учащіеся уже познакомились съ цифрами, можно не только записывать, для облегченія разсужденія при рѣшеніи задачи и вычисленій, числа на классную доску, но и пользоваться во время урока «Сборникомъ задачъ», изъ котораго ученики сначала читаютъ задачу вслухъ, а потомъ рѣшаютъ.

Предложенная задача повторяется однимъ или, если нужно, двумя и тремя учениками; послѣ чего предлагаются преимущественно слабымъ ученикамъ частные вопросы, касательно того, что ищется въ задачѣ, что извѣстно, что означаетъ какое-либо данное въ задачѣ число и т. п. Затѣмъ, задача снова повторяется въ цѣлости и ученики рѣшаютъ ее въ умѣ. Предлагая ученикамъ задачу, слѣдуетъ съ достаточною подробностію и наглядностію выяснить имъ всякое новое понятіе, входящее въ задачу, каковы напримѣръ: бассейнъ, урожай, прибыль и т. п. Выждавъ нѣкоторое время, пока большинство класса какимъ-либо внѣшнимъ знакомъ (поднятіемъ руки, постукиваніемъ карандаша и т. п.) заявитъ о томъ, что задача рѣшена, учитель спрашиваетъ, кто какое получилъ число. Замѣтивъ по отвѣтамъ, что нѣкоторые ученики утеряли изъ памяти содержаніе задачи или переиначили числа, учитель снова воспроизводитъ то и другое по частямъ, обращаясь къ классу съ вопросами.

Не нужно увлекаться быстротою отвѣтовъ *нѣкоторыхъ* учениковъ, рѣшившихъ задачу, а по возможности наводящими вопросами доводить *весь классъ* до ея рѣшенія. Наиболѣе значительное вниманіе слѣдуетъ обратить вначалѣ знакомства съ новыми учениками на то, чтобы слабые ученики не повторяли отвѣтовъ своихъ болѣе способныхъ товарищей, когда сами еще не дошли до рѣшенія задачи.

Когда весь классъ или большинство учениковъ рѣшили задачу, то рѣшеніе это воспроизводится вначалѣ по частямъ посредствомъ вопросовъ, обращенныхъ къ классу, затѣмъ и въ цѣлости, причемъ ученикъ излагаетъ полное разсужденіе, ведущее къ отысканію искомаго числа.

При рѣшеніи задачи, высказываемомъ ученикомъ, нужно предоставить ему полную свободу въ направленіи своихъ разсужденій. Часто преподаватель, рѣшивъ самъ задачу, предложенную ученикамъ, по своему легчайшему и скорѣйшему пріему, старается направить разсужденіе ученика на тотъ путь, по которому шло его собственное. Гораздо производительнѣе сдѣлать поправки въ разсужденіи, высказанномъ ученикомъ, нежели насиловать мысль его, которая, по особенности своего склада, весьма часто отличается оригинальностью.

Для образца привожу полное рѣшеніе въ классѣ одной устной задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 30). Одинъ мальчикъ получилъ отъ отца пять копеекъ, а другой—двумя копейками менѣе; на всѣ эти деньги они купили четыре яблока по одинаковой цѣнѣ. Сколько заплатили они за каждое яблоко?

Учитель. О комъ говорится въ этой задачѣ?

Ученикъ. Въ этой задачѣ говорится о двухъ мальчикахъ.

Учит. Что сказано о первомъ мальчикѣ?

Учен. О первомъ мальчикѣ сказано, что онъ получилъ отъ отца пять копеекъ.

Учит. А о второмъ?

Учен. О второмъ мальчикѣ сказано, что онъ получилъ двумя копейками менѣе, нежели первый мальчикъ.

Учит. Какъ они употребили эти деньги?

Учен. Мальчики на всѣ полученныя отъ отца деньги купили четыре яблока.

Учит. Что ищется въ этой задачѣ?

Учен. Въ этой задачѣ ищется, сколько заплатили мальчики за каждое яблоко?

Учит. Кто можетъ повторить всю задачу?

По числу поднятыхъ учениками рукъ учитель судитъ, всѣ-ли дѣти усвоили содержаніе задачи, и если окажется, что многіе не могутъ повторить ее, то снова предлагаетъ частные вопросы, чтобы возстановить въ памяти забытое число или условіе. Затѣмъ задача повторяется въ цѣлости, ученики рѣшаютъ ее въ умѣ и потомъ на вопросъ учителя: «кто рѣшилъ задачу?» заявляютъ внѣшнимъ знакомъ, и даетъ отвѣтъ тотъ, кого учитель назвалъ по имени. Послѣ полученія отвѣта отъ учениковъ, правильнаго или неправильнаго, учитель для словеснаго воспроизведенія всего разсужденія при рѣшеніи задачи ведетъ разговоръ въ классѣ такимъ образомъ:

По первому пріему.

Учит. Что прежде всего вы узнали для рѣшенія этой задачи?

Учен. Сколько денегъ получилъ второй мальчикъ.

Учит. Сколько же онъ получилъ?

Учен. Второй мальчикъ получилъ три копейки.

Учит. Какъ вы узнали это?

Учен. Первый мальчикъ получилъ пять копеекъ, а второй—двумя копейками менѣе; значитъ, второй мальчикъ получилъ пять копеекъ безъ двухъ копеекъ, то-есть три копейки.

Учит. Что узнали потомъ?

Учен. Потомъ я узналъ, сколько денегъ получили два мальчика вмѣстѣ.

Учит. Какъ вы это узнали?

Учен. Одинъ мальчикъ получилъ пять копеекъ, а другой три копейки, значитъ оба вмѣстѣ получили пять да три, то-есть восемь копеекъ.

Учит. Что узнали потомъ?

Учен. Потомъ я узналъ, сколько мальчики заплатили за каждое яблоко.

Учит. Сколько же они заплатили?

Учен. Мальчики заплатили за каждое яблоко двѣ копейки.

Учит. Какъ вы это узнали?

Учен. Мальчики за четыре яблока заплатили восемь коп., значитъ за каждое яблоко двѣ коп., потому что четвертая часть восьми есть два.

Наконецъ, все рѣшеніе задачи высказывается однимъ ученикомъ.

Учен. Первый мальчикъ получилъ пять копеекъ, а второй двумя копейками менѣе, значитъ второй получилъ три копейки, потому что пять безъ двухъ будетъ три. Оба мальчика получили вмѣстѣ восемь копеекъ, потому что пять да три будетъ восемь. За четыре яблока мальчики заплатили восемь копеекъ, значитъ за каждое яблоко—двѣ копейки, потому что четвертая часть восьми будетъ два.

По второму пріему.

Этотъ пріемъ употребляется обыкновенно для тѣхъ дѣтей, которыя вовсе не могутъ приступить къ рѣшенію задачи. Я привожу здѣсь образецъ наводящихъ вопросовъ въ сокращенной формѣ.

Учит. Что ищется въ задачѣ?

Учен. Сколько заплатили мальчики за каждое яблоко.

Учит. Что надо знать для того, чтобы это вычислить?

Учен. Надо знать, сколько заплатили мальчики за всѣ 4 яблока.

Учит. А что надо прежде опредѣлить?

Учен. Надо опредѣлить, сколько денегъ получили оба мальчика вмѣстѣ.

Учит. Что-же для этого надо узнать?

Учен. Надо узнать, сколько денегъ получилъ второй мальчикъ.

Затѣмъ опредѣляются всѣ неизвѣстныя числа одно за другимъ.

Приводя здѣсь въ подробности классную работу при рѣшеніи этой задачи, я вовсе не имѣю въ виду этимъ сказать, что всякую устную задачу слѣдуетъ рѣшать и разбирать такъ подробно. Для одной задачи учитель ограничится только отвѣтомъ числа, выражающаго искомую величину, для другой предложитъ нѣсколько вопросовъ по поводу ея рѣшенія, для третьей предложитъ всѣ частные вопросы касательно опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ (въ нашей задачѣ: сколько денегъ получилъ второй мальчикъ, сколько денегъ получили два мальчика вмѣстѣ, сколько заплатили они за каждое яблоко), для четвертой потребуетъ сразу высказать полное рѣшеніе. Но и вся приведенная работа при рѣшеніи одной задачи не должна казаться слишкомъ кропотливою и утомительною, если принять во вниманіе, что работа ведется всѣмъ классомъ, что отвѣты даются различными учениками и такимъ образомъ работа распредѣляется между всѣми. А если учитель достигъ на подобной работѣ того, что ученикъ можетъ ясно и сжато высказать полное рѣшеніе задачи, то онъ

достигъ многаго въ развитіи мышленія ученика, въ разборѣ вопроса и въ пріемѣ вычисленія.

При изученіи чиселъ первой сотни весьма важное значеніе имѣютъ *неопредѣленныя задачи*, требующія разложенія изучаемаго числа на слагаемыя и множители; допуская много рѣшеній, онѣ особенно интересуютъ учащихся и служатъ для упражненія ихъ въ бѣгломъ вычисленіи. Образцы такой работы приведены въ самомъ курсѣ.

Письменное рѣшеніе задачъ на этой ступени обученія, пока дѣти незнакомы съ цифрами, допускается только съ цѣлію занять дѣтей письменною работою для перемѣны работы устной. Дѣти записываютъ всѣ числа и результаты вычисленія крестиками или кружками.

Задача. (Изъ Сборника № 36). Мальчикъ сорвалъ съ яблони четыре раза по два яблока и далъ двумъ братьямъ по три яблока, а всѣ остальныя яблоки раздѣлилъ поровну между двумя сестрами. Сколько яблокъ получила каждая сестра?

Дѣти записываютъ такъ:

OO OO OO OO

то-есть четыре раза по два;

OOOOOOOO

составилось 8 яблокъ;

OOO OOO O O

мальчикъ далъ двумъ братьямъ по 3 яблока, а каждой изъ двухъ сестеръ—по одному яблоку. Такъ что все рѣшеніе этой задачи посредствомъ кружковъ записывается въ трехъ строчкахъ.

Послѣ объясненія пріемовъ рѣшенія задачъ въ классѣ, считаю настоятельно необходимымъ обратить вниманіе учащихъ на то, что дѣти на первыхъ порахъ обученія обыкновенно выражаются съ большимъ трудомъ; передача мысли въ словахъ представляетъ для нихъ неодолимое затрудненіе, вслѣдствіе малаго запаса словъ а еще болѣе вслѣдствіе непривычки связывать слова въ длинныя фразы. Такимъ образомъ, дѣти могутъ вполнѣ хорошо рѣшить задачу и дать вѣрный численный отвѣтъ, но не могутъ высказать плана рѣшенія и причины вычисленій, необходимыхъ для рѣшенія задачи.

Кромѣ того, дѣти, опять таки при началѣ обученія, рѣшившія задачу и получившія вѣрный отвѣтъ, рѣшительно не понимаютъ требованія учителя объяснить рѣшеніе задачи; задача и ея рѣшеніе до того ясны дѣтямъ, если только задача выбрана соотвѣтственно силамъ дѣтей, что имъ кажется совершенно лишнимъ давать какое-либо разъясненіе. А потому настойчивое требованіе учителя—объяснить рѣшеніе задачи—кажется дѣтямъ безполезною придирчивостью, утомляетъ ихъ и отбиваетъ иногда даже охоту заявлять учителю о рѣшеніи задачи, чтобы не под-

вергнуться непріятному разговору съ учителемъ по поводу рѣшенія задачи.

А потому: во-первыхъ, какъ сказано выше, въ началѣ обученія достаточно ограничиться отвѣтомъ числа, получаемаго отъ рѣшенія задачи, и, мало-по-малу, требовать самыхъ краткихъ разъясненій рѣшенія и то не всей задачи, а сначала опредѣленія какой-либо одной вспомогательной неизвѣстной въ задачѣ, потомъ уже переходить къ объясненію всего рѣшенія и наконецъ къ предварительному построенію плана рѣшенія; во-вторыхъ, для пріученія дѣтей устанавливать предварительный планъ рѣшенія задачи и потомъ уже переходить къ вычисленіямъ, лучше предлагать задачи съ неопредѣленными данными числами; дѣти самою задачею будутъ поставлены въ необходимость думать не о вычисленіяхъ съ данными числами, а только о планѣ рѣшенія задачи. Для поясненія этого пріема привожу образецъ такой задачи и работы съ дѣтьми по поводу ея рѣшенія.

Задача. Мальчикъ купилъ нѣсколько яблокъ; за каждое яблоко онъ заплатилъ одинаковую цѣну и съ денегъ, данныхъ разнощику, получилъ сдачи. Сколько сдачи получилъ мальчикъ?

Какъ видно, задача представляетъ только собраніе условій и вопросъ; числа данныя въ ней не опредѣлены. Дѣти вначалѣ выражаютъ недоумѣніе и говорятъ, что такой задачи рѣшать нельзя. На вопросъ учителя, почему нельзя, дѣти поясняютъ, что не указано ни числа яблокъ, ни цѣны яблока, ни количества денегъ, данныхъ разнощику, слѣдовательно отвѣта на вопросъ дать невозможно.

Учитель. Какъ вы будете рѣшать эту задачу, когда я дамъ всѣ необходимыя вамъ числа?

Ученики. Тогда мы узнаемъ, сколько стоютъ купленныя яблоки и затѣмъ узнаемъ, сколько приходится сдачи.

Учит. Какъ вы узнаете, сколько стоютъ яблоки?

Учен. Цѣну одного яблока мы повторимъ столько разъ, сколько куплено яблокъ.

Учит. А какъ потомъ узнаете сдачу?

Учен. Для опредѣленія сдачи мы изъ денегъ, данныхъ разнощику, вычтемъ то, что ему слѣдуетъ получить за яблоки.

Учит. Итакъ скажите теперь весь ходъ рѣшенія задачи.

Учен. Для рѣшенія этой задачи мы узнаемъ сперва, сколько слѣдуетъ заплатить за купленныя яблоки; для этого цѣну одного яблока повторимъ столько разъ, сколько куплено яблокъ; потомъ узнаемъ сдачу; для этого изъ денегъ, данныхъ разнощику, вычтемъ то, что ему слѣдуетъ получить за яблоки.

Такой разговоръ по поводу рѣшенія задачи, какъ видно, легко за-

вести съ дѣтьми, потому что числа не отвлекаютъ ихъ вниманія и они по необходимости сосредоточиваютъ его на условіяхъ задачи.

Послѣ высказаннаго плана рѣшенія, учитель предлагаетъ дѣтямъ взять числа, какія имъ угодно, поставить эти числа въ данную задачу и рѣшать ее по установленному плану. Эта работа всегда нравится дѣтямъ и возбуждаетъ ихъ вниманіе. При подборѣ чиселъ и вычисленіи съ ними легко обнаруживается какъ степень навыка дѣтей обращаться съ числами, такъ и предѣлъ, въ которомъ дѣти свободно обращаются съ числомъ.

Послѣ двухъ, трехъ подобныхъ задачъ, обстоятельно разобранныхъ, можно перейти къ установленію предварительнаго плана рѣшенія для всякой опредѣленной задачи.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Ученику было задано выучить восемь нѣмецкихъ словъ; онъ выучилъ пять, потомъ три изъ нихъ забылъ; еще выучилъ четыре, два забылъ; наконецъ еще выучилъ три. Сколько словъ еще осталось ему выучить?

У мальчика было восемь копеекъ; половину всѣхъ своихъ денегъ онъ издержалъ на покупку грифелей, четвертую часть—отдалъ бѣдному, восьмую часть издержалъ на покупку сухаря, а когда получилъ отъ отца еще три копейки и прибавилъ ихъ къ оставшимся деньгамъ, то купилъ за всѣ эти деньги карандашъ. Сколько заплатилъ мальчикъ за карандашъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ восьми отнимаю пять, къ остатку прибавляю три и полученное число дѣлю пополамъ; къ половинѣ прибавляю четыре и еще одинъ. Сколько будетъ, если полученное число раздѣлить на четыре равныя части?

Беру половину восьми и четверть восьми, складываю ихъ вмѣстѣ; полученное число дѣлю пополамъ; къ полученному числу прибавляю пять и снова все число дѣлю пополамъ. Сколько получилось въ каждой половинѣ?

в) *Вопросы для повторенія.* Половина восьми на сколько больше половины шести? Какое число составляетъ половину четырехъ и только четверть восьми? Какое число надо взять четыре раза, чтобы получить восемь, и какое только два раза? Сколько надо отнять отъ восьми, чтобы три въ остаткѣ содержалось ровно два раза? Сколько надо прибавить къ третьей части шести, чтобы получилось число въ два раза меньше восьми? Какая часть восьми равняется третьей части шести? и т. п.

Девять.

1) Разложеніе.

Разложеніе производится посредствомъ наглядныхъ пособій или безъ нихъ, судя по развитію и навыку дѣтей, въ слѣдующемъ порядкѣ:

$9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$
$9 = 3 + 3 + 3$
$9 = 4 + 4 + 1$
$9 = 5 + 4$
$9 = 6 + 3$
$9 = 7 + 2$
$9 = 8 + 1$

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе.* Сколько надо прибавить къ тремъ, пяти, семи, чтобы получить девять?

Чего не достаетъ двумъ, четыремъ, шести, восьми до девяти?

Изъ какихъ трехъ равныхъ чиселъ составляется девять? Изъ какихъ двухъ неравныхъ?

Прибавляйте къ одному по два до девяти, прибавляйте къ одному по четыре до девяти.

Какое число надо увеличить двумя, пятью, семью единицами, чтобы получить девять?

Сколько получится, если отъ девяти отнять два, четыре, шесть, восемь?

Сколько будетъ девять безъ одного, безъ трехъ, безъ пяти, безъ семи? Какое число менѣе девяти пятью, двумя, шестью единицами?

Девять чѣмъ болѣе трехъ, семи, четырехъ?

Какое число можно отнять отъ девяти четыре раза, какое два раза и какое только одинъ разъ?

Сколько получится, если девять уменьшить двумя, пятью, восемью единицами?

Найти число, къ которому если прибавить четыре, то получится девять.

Умноженіе и *дѣленіе.* Какое число нужно взять три раза, чтобы получить девять?

Сколько не достаетъ до девяти, если взять четырежды два?

Сколько разъ нужно взять по четыре, чтобы получить число единицею меньшее девяти?

Какія числа содержатся въ девяти безъ остатка?

Сколько разъ девять содержится въ девяти?

Какія числа содержатся въ девяти съ остаткомъ единица?

Сколько получится, если уменьшить девять въ три раза?

Какъ велика третья часть девяти?

Можно ли девять яблокъ раздать двумъ, четыремъ мальчикамъ поровну, не разрѣзывая ни одного яблока?

Почему нельзя?

3) Задачи.

№№ 40, 41, ... 46.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У старшаго брата было четыре орѣха, у средняго пять; средній отдалъ старшему всѣ свои орѣхи; старшій же далъ младшему три орѣха, а всѣ остальные орѣхи раздѣлилъ поровну между тремя сестрами. Сколько орѣховъ получила каждая сестра?

У мальчика было девять копеекъ; третью часть всѣхъ своихъ денегъ онъ отдалъ сестрѣ, третью часть оставшихся денегъ истратилъ на покупку кренделя, половину того, что осталось отъ покупки кренделя, далъ бѣдному и наконецъ половину оставшихся затѣмъ денегъ потерялъ; взамѣнъ потерянныхъ денегъ онъ получилъ отъ отца столько копеекъ, что у него составилось восемь копеекъ. Сколько копеекъ получилъ сынъ отъ отца?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ девяти отнимаю семь, къ полученному остатку прибавляю четыре и составившееся число дѣлю пополамъ; къ одной половинѣ прибавляю пять и снова полученное число дѣлю пополамъ. Сколько послѣдней половинѣ не достаетъ до девяти?

Отъ девяти отнимаю треть его, отъ полученнаго остатка отнимаю треть его; отъ полученнаго остатка отнимаю четвертую часть его; остатокъ увеличиваю въ три раза. Какое число получилось?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ трижды три? Сколько будетъ три да три? Если отъ девяти отнять единицу, то какія числа будутъ содержаться безъ остатка въ полученномъ числѣ? На сколько девять безъ трехъ больше восьми безъ шести? Сколько надо отнять отъ девяти, чтобы въ остаткѣ получилось такое же число, какое получается, если отъ восьми отнять четыре? Треть девяти какую часть шести составляетъ? Сколько надо отнять отъ девяти, чтобы получить число, которое дѣлится ровно пополамъ? и т. п.

Десять.

1) Разложеніе.

Письменное разложеніе посредствомъ кружковъ составитъ такую таблицу:

○○○○○○○○○○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○○ ○○ ○○ ○○ ○○
○○○ ○○○ ○○○ ○
○○○○ ○○○○ ○○
○○○○○ ○○○○○
○○○○○○ ○○○○
○○○○○○○ ○○○
○○○○○○○○ ○○
○○○○○○○○○ ○

При составленіи и разложеніи десяти дается названіе *десятокъ*.

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе*. Отъ сложенія какихъ чиселъ получается десятокъ? Складывайте по два до десяти. Сколько разъ сложили по два? Прибавляйте къ одному по три до десяти. Сколько разъ прибавили по три?

Къ какому числу нужно прибавить два раза по четыре, чтобы получить десять?

Отъ сложенія какихъ равныхъ чиселъ получается десять? Какія два неравныя числа нужно сложить вмѣстѣ, чтобы получить десятокъ?

Сколько надо прибавить къ тремъ, пяти, восьми, чтобы получить десять?

Сколько не достаетъ двумъ, четыремъ, шести, девяти до десяти?

Отнимайте отъ десяти по единицѣ, по два, по три, по четыре. Сколько разъ отняли отъ десяти по одному, по два, по три, по четыре?

Какое число можно отнять отъ десяти пять разъ, какое два раза, три раза?

Сколько получится въ остаткѣ, если отъ десяти отнять два раза по четыре, три раза по три?

Сколько будетъ десять безъ трехъ, безъ четырехъ, безъ восьми?

На сколько десять болѣе двухъ, пяти, семи?

Сколько надо отнять отъ десяти, чтобы въ остаткѣ получилось три, шесть, восемь?

Умноженіе и *дѣленіе*. Сколько будетъ пять разъ два? Дважды пять?

Сколько будетъ десять разъ одинъ?

Сколько надо прибавить къ тремъ, взятымъ три раза, чтобы получить десять?

Десять копеекъ сколькимъ бѣднымъ можно раздать поровну, и сколько каждый получитъ?

Какія числа содержатся въ десяти цѣлое число разъ безъ остатка?

На сколько и какія равныя части можно раздѣлить десять?

Какія числа содержатся въ десяти съ остаткомъ одинъ, съ остаткомъ два, три?

Во сколько разъ десятокъ больше одного, двухъ, пяти?

Сколько получится, если десять уменьшить въ два раза, въ пять разъ?

Какъ велика половина, пятая, десятая часть десяти?

3) Задачи.

№№ 47, 48, ... 67.

Задача. (Изъ Сборника № 52). Два брата и сестра купили десять сливъ; сестра дала на эту покупку одну копейку, а братья—по двѣ копейки. Сколько сливъ долженъ получить каждый?

Вопросы для установленія плана рѣшенія въ случаѣ затрудненія учениковъ. Что ищется въ задачѣ? Сколько сливъ долженъ получить каждый.

Придется ли сливъ каждому поровну? Нѣтъ, потому что они денегъ не всѣ дали поровну на покупку сливъ.

А который изъ братьевъ получитъ сливъ больше? Оба получатъ поровну, потому что оба дали по двѣ копейки.

Во сколько разъ каждый изъ братьевъ получитъ сливъ болѣе, чѣмъ сестра? Въ два раза, потому что каждый изъ братьевъ далъ денегъ въ два раза болѣе, чѣмъ сестра.

Итакъ, что надо принять въ разсчетъ, чтобы раздѣлить сливы между сестрой и двумя братьями? Надо принять въ разсчетъ, кто сколько далъ денегъ на покупку сливъ.

Что надо знать, чтобы вычислить, сколько сливъ придется на долю сестры? Надо знать, сколько сливъ приходится на одну копейку, такъ какъ она дала всего одну копейку.

Какъ узнать, сколько сливъ приходится на одну копейку? Нужно вычислить, за сколько копеекъ куплено десять сливъ.

Высчитайте это и рѣшайте всю задачу.

Нѣкоторыя дѣти рѣшаютъ эту задачу другимъ способомъ, опредѣляя, что одна слива стоитъ полкопейки, и что слѣдовательно за одну коп. придется двѣ сливы и т. д. Нѣтъ никакого повода не одобрять такого способа рѣшенія этой задачи, если онъ предложенъ ученикомъ; я же здѣсь привелъ образецъ катихизаціи на тотъ случай, когда многіе ученики не могутъ рѣшить предложенной задачи. Задачи, затрудняющія учениковъ такъ, что большинство класса не можетъ ихъ рѣшать, слѣдуетъ

предлагать отъ времени до времени, чтобы подробнымъ разборомъ задачи, подобнымъ выше приведенному, научить дѣтей пользоваться условіями задачи, ведя послѣдовательное правильное разсужденіе, и доходить до установленія способа рѣшенія.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У меня было двѣ монеты по двѣ копейки и двѣ по три копейки. Изъ этихъ денегъ я истратилъ сначала одну копейку, потомъ пять и, наконецъ, еще двѣ. Сколько нужно прибавить къ оставшимся у меня деньгамъ, чтобы я могъ купить тетрадь, за которую требуютъ восемь копеекъ?

Въ классѣ пять скамеекъ; на каждой сидѣло по два мальчика; изъ класса вышли три мальчика, потомъ еще два; потомъ въ классъ вошли четыре мальчика, и всѣ размѣстились по три на скамейкахъ. На скольких скамейкахъ усѣлись мальчики?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ десяти отнимаю четыре; къ полученному числу прибавляю три; снова отъ полученнаго числа отнимаю пять; полученное число дѣлю пополамъ. Сколько получится въ остаткѣ, если одну изъ этихъ половинъ отнять отъ десяти?

Беру половину десяти; отнимаю отъ нея пятую часть десяти; къ полученному числу прибавляю десятую часть десяти; полученное число увеличиваю въ два раза. Сколько единицъ не достаетъ полученному числу до десяти?

в) *Вопросы для повторенія.* Изъ какихъ двухъ равныхъ чиселъ состоитъ десять? Изъ какихъ пяти, десяти равныхъ чиселъ? Половина десяти на сколько больше пятой его части? Пятая часть десяти сколько разъ содержится въ восьми? Сколько разъ треть шести содержится въ десяти? Какое число нужно взять два раза, чтобы получить десять безъ двухъ? Какое число нужно взять три раза, чтобы получить десять безъ одного? Половина четырехъ какую часть десяти составляетъ?

Повтореніе пройденнаго—на цифрахъ.

Упражненія при изученіи первыхъ десяти чиселъ такъ несложны, что можно обходиться при нихъ и безъ цифръ. Предполагая, что знакомство съ числами, подобное изложенному мною, можетъ быть начато дѣтьми даже раньше семилѣтняго возраста, если только выбирать изъ „Сборника“ задачи попроще, я считаю за лучшее не вводить при первоначальныхъ упражненіяхъ ни цифръ, ни знаковъ дѣйствій, чтобы тѣмъ яснѣе показать дѣтямъ впослѣдствіи значеніе и удобство того и другого.

Если дѣти, начинающія обучаться Ариѳметикѣ, уже умѣютъ писать буквы, то введеніе цифръ и знаковъ дѣйствій на первыхъ же урокахъ не представитъ для нихъ никакого затрудненія. Слѣдуетъ сказать однакоже, что вообще съ этимъ спѣшить не нужно и лучше ввести цифру при повтореніи упражненій, когда уже нѣсколько чиселъ изучено; ученики снова передѣлаютъ то, что ими проходилось прежде, и притомъ передѣлаютъ въ нѣсколько другой формѣ, что еще болѣе закрѣпитъ въ ихъ памяти тѣ первоначальныя основныя понятія и выводы, прочное усвоеніе которыхъ послужитъ хорошимъ началомъ для прохожденія дальнѣйшаго курса Ариѳметики. Кромѣ того, введеніе цифръ при самомъ началѣ обученія, пока дѣти хотя сколько-нибудь не освоились съ числомъ, какъ числомъ, безъ всякаго внѣшняго знака его, упрощающаго вычисленія, можетъ легко повести къ тому, что дѣти, какъ это встрѣчается весьма часто, будутъ мыслить не о числѣ, а о цифрѣ, его изображающей, и будутъ всѣ вычисленія относить не къ числу, а къ цифрѣ. Отъ этого навыка, сильно задерживающаго все дальнѣйшее правильное обученіе Ариѳметикѣ, впослѣдствіи трудно освободить учащихся.

Обозначеніе дѣйствій также хорошо ввести тогда, когда уже дѣти осязательно поняли, что числа могутъ быть между собою въ различныхъ отношеніяхъ, и что часто для опредѣленія различно выраженныхъ словами отношеній чиселъ приходится производить одно и то же вычисленіе;—это-то вычисленіе они и будутъ сознательно обозначать однимъ и тѣмъ же знакомъ дѣйствія.

1) Писаніе цифръ.

Выясненіе необходимости цифръ при вычисленіяхъ и обученіе написанію цифръ, когда уже дѣти изучили первыя десять чиселъ, ведется легко и быстро, хотя изложить пріемъ учителя, для исполненія классной работы въ этомъ случаѣ, довольно трудно. Я изложу здѣсь въ самыхъ общихъ чертахъ пріемъ, котораго мнѣ приходилось держаться при проведеніи этой работы въ классѣ и съ отдѣльными учениками. Дѣтямъ предлагаются вопросы:

„Когда мы насчитали нѣсколько предметовъ, то какъ намъ замѣтить, сколько ихъ насчитано, чтобы не забыть?“ Дѣти выражаютъ по этому поводу различныя мнѣнія, каковы: отмѣтить на бумагѣ или на доскѣ столько черточекъ или другихъ значковъ, сколько было насчитано предметовъ; отложить на счетахъ число предметовъ шарами; положить въ карманъ или въ другое мѣсто число камешковъ по числу предметовъ; сдѣлать на палкѣ мѣтки (бирки) по числу предметовъ, и т. п. Всѣ эти пріемы слѣдуетъ одобрить, такъ какъ они въ сущности составляютъ хорошій переходъ къ обозначенію числа какимъ-либо знакомъ.

„Если мы посылаемъ кого-нибудь купить, напримѣръ, нѣсколько грифелей и желаемъ записать, чтобы лавочникъ зналъ сколько нужно дать грифелей, то какой изъ сказанныхъ вами способовъ слѣдуетъ употребить?“ Нужно сдѣлать въ запискѣ столько черточекъ или кружковъ, сколько требуется грифелей.

„Удобно ли такъ записывать, когда насчитано очень много предметовъ?“ Неудобно, потому что придется, во-первыхъ, много писать черточекъ, а во-вторыхъ, кромѣ предметовъ приходится считать еще и самыя черточки.

„Не знаетъ ли кто, какъ поступаютъ въ этомъ случаѣ тѣ люди, которые умѣютъ читать и писать?“ Они употребляютъ для этого особенные значки, которые называются *цифрами.*

„Нельзя ли придумать и намъ какіе-либо знаки, чтобы удобнѣе было отмѣчать на бумагѣ или на доскѣ, сколько именно предметовъ насчитано, такъ что, когда я напишу такой значекъ, то вы всѣ знали бы, какое число отмѣчено? Напримѣръ, мы отдали въ починку семь стульевъ, и чтобы не забыть, сколько ихъ отдано, мы можемъ на бумажкѣ поставить семь черточекъ; но если условимся вмѣсто семи черточекъ ставить одинъ крестикъ (×), то уже и будемъ помнить, что этотъ крестикъ означаетъ число семь. Придумайте какой-либо значекъ для числа восемь.“ Дѣти условливаются, напримѣръ, означать это число кружкомъ. „Значитъ, если я сдѣлаю на доскѣ кружокъ и скажу, что у меня въ карманѣ столько копеекъ, то что это будетъ означать?“ Что у васъ въ карманѣ восемь коп. „А если кто войдетъ въ нашъ классъ, и мы, начертивъ на доскѣ кружокъ, спросимъ его, сколько копеекъ означаетъ этотъ кружокъ, пойметъ ли онъ?“ Нѣтъ, не пойметъ, потому что не знаетъ, какое число мы условились отмѣчать такимъ значкомъ.

Значитъ, какъ видите, надо взять такіе значки, которые употребляются всѣми грамотными людьми и которые употребляются во всѣхъ книгахъ. Такіе значки слѣдующіе: если хотятъ отмѣтить одинъ предметъ, то пишутъ одну черточку (1), если хотятъ отмѣтить два предмета, то вмѣсто двухъ черточекъ пишутъ 2, для трехъ предметовъ употребляется значекъ 3, для четырехъ—4, для пяти—5. Замѣтьте пока эти значки, а потомъ я покажу вамъ значки и для другихъ чиселъ *).

*) Хорошимъ примѣромъ необходимости такихъ значковъ служатъ различныя мѣдныя монеты (1 коп., 2 коп., 3 коп., 5 коп.), показываемыя ученикамъ учителемъ. Съ разсмотрѣнія цифръ на монетахъ можно даже прямо начинать ознакомленіе учащихся съ понятіемъ о цифрѣ вообще и ея необходимости для изображенія чиселъ.

Учитель пишетъ на доскѣ первыя пять цифръ, раздѣльно одну отъ другой, и обращается къ классу съ вопросомъ: „если бы я хотѣлъ написать крестиками, сколько единицъ каждая цифра означаетъ, то сколько крестиковъ долженъ я подписать подъ этой цифрой, а подъ этой?“ и т. д.

Получается на доскѣ такая табличка:

1	2	3	4	5
×	××	×××	××××	×××××

Затѣмъ идетъ съ дѣтьми разговоръ по поводу пріема написанія каждой цифры по составляющимъ ее линіямъ, совершенно подобный тому разговору, который ведется по поводу написанія буквъ. Не вдаваясь въ эти подробности, перехожу къ упражненіямъ, относящимся собственно къ нашему предмету. Когда дѣти по указанію учителя и по образцу цифръ, написанныхъ на доскѣ, научились отчетливо ихъ изображать, цифры стираются съ доски, и дѣти записываютъ на своихъ доскахъ число откинутыхъ учителемъ шаровъ на проволокѣ счетовъ, число кружковъ, начерченныхъ на доскѣ, число ногъ у лошади, число рукъ у человѣка, число пальцевъ на рукѣ и т. п.; откладываютъ на счетахъ число шаровъ, или отмѣчаютъ на доскахъ число крестиковъ по цифрамъ, которыя учитель пишетъ въ разбивку на доскѣ. Эта работа продолжается до тѣхъ поръ, пока дѣти безошибочно привыкнутъ относить цифру къ изображаемому ею числу. При этомъ постоянно на примѣрахъ объясняется классу значеніе цифры относительно числа ею изображаемаго и что одна и та же цифра служитъ для изображенія одного и того же числа какихъ угодно предметовъ.

Таковъ же пріемъ усвоенія учениками и прочихъ знаковъ для чиселъ 6, 7, 8, 9 и 10. При этомъ имъ говорится, что тѣхъ значковъ, которые они узнали, достаточно для изображенія какихъ угодно большихъ и малыхъ чиселъ, какъ это будетъ показано впослѣдствіи, а также объясняется, почему десятокъ обозначается двумя знаками, отлично отъ другихъ чиселъ меньшихъ десяти. Какъ можно считать предметы по одиночкѣ, такъ же точно можно считать ихъ и десятками. Предлагаются вопросы, какіе предметы считаются и продаются десятками, и какъ можно считать предметы десятками. По пріему обозначенія цифрами одного десятка дѣти записываютъ 2, 3 и т. д. десятковъ.

Хотя работа для усвоенія учениками цифръ чисто механическая, но она можетъ быть ведена въ классѣ съ разнообразными упражненіями, а потому и не можетъ представлять ученикамъ повода къ умственному утомленію. Разнообразіе это, какъ уже было сказано, состоитъ въ записыва-

ніи цифрами чиселъ, называемыхъ учителемъ, въ откидываніи на счетахъ чиселъ, записанныхъ цифрами на доскѣ, въ записываніи на доскахъ черточекъ или кружковъ, соотвѣтственно цифрѣ, выставленной на доскѣ, и обратно: написанныя учителемъ цифры читаются учениками. Кромѣ того, для разнообразія работы, можно предлагать ученикамъ устныя задачи изъ пройденнаго курса и требовать, чтобы они записывали цифрами на доскахъ результатъ рѣшенія задачи.

2) Таблички разложенія чиселъ на слагаемыя.

Когда ученики хорошо поняли и усвоили способъ изображенія чиселъ цифрами, можно перейти къ приложенію цифръ при составленіи табличекъ разложенія чиселъ перваго десятка на слагаемыя, что будетъ служить хорошимъ повтореніемъ упражненій, производившихся прежде безъ помощи цифръ.

Запишите цифрами два числа, изъ которыхъ можно составить 8. Дѣти пишутъ:

4	4
5	3
6	2
7	1

Какъ прочесть вторую строчку? Пять да три, пять и три, къ пяти прибавить три, пять сложить съ тремя и т. д.

А какъ записать, если хотятъ обозначить, что отъ 5 нужно отнять 3?

Для того, чтобы отмѣтить, что одно число нужно прибавить къ другому, или одно число отнять отъ другаго, употребляются также особенные значки; по этимъ значкамъ всякій, читающій написанное, понимаетъ, что дѣлается съ числами.

Указываются дѣтямъ знаки сложенія и вычитанія *). Запишите теперь на вашихъ доскахъ цифрою число 8. Разложите его на единицы, двойки, тройки и т. д. посредствомъ крестиковъ.

Дѣти составляютъ табличку разложенія такую, какая приведена при изученіи этого числа.

---

*) Въ нѣкоторыхъ училищахъ въ Германіи мнѣ случилось видѣть на стѣнѣ въ классѣ большую таблицу съ цифрами и знаками дѣйствій и съ надписями значенія каждой цифры и знака, такимъ образомъ:

+ и, да, придать, увеличить на, сложить.

— безъ, отнять, уменьшить на, вычесть,

и т. д.

Этими таблицами ученики пользуются при обозначеніи чиселъ и дѣйствій съ числами.

Подъ этой табличкой напишите другую, въ которой число крестиковъ отмѣчайте цифрами.

Составится табличка:

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
2 + 2 + 2 + 2
3 + 3 + 2
4 + 4
5 + 3
6 + 2
7 + 1

сначала безъ знаковъ сложенія, а потомъ, по указанію учителя, ставятся и знаки. Тутъ же вводится и знакъ равенства, который замѣняетъ слова: „будетъ, составитъ, равно, получится" и т. п. Въ окончательномъ видѣ дѣти пишутъ, напримѣръ, разложеніе

$$8 = 3 + 3 + 2$$

и читаютъ его такъ: 8 состоитъ изъ трехъ, еще трехъ и двухъ или 8 получится, если къ тремъ прибавить три и еще два.

Затѣмъ идутъ упражненія въ письменномъ разложеніи на слагаемыя различныхъ чиселъ въ разбивку.

Эти разложенія повѣряются учителемъ также, какъ и прежнія, производимыя учениками посредствомъ крестиковъ или кружковъ. Наблюдается, чтобы разложенія располагались въ порядкѣ, то-есть, чтобы сначала число составлялось изъ единицъ, потомъ изъ двоекъ, троекъ и т. д.

Дальнѣйшее упражненіе состоитъ въ томъ, что ученики, умѣя письменно разлагать изученныя числа на слагаемыя, упрощаютъ и обобщаютъ эти разложенія, а также изъ таблички сложенія обратно выводятъ табличку вычитанія, изъ чего вытекаетъ всестороннее сравненіе изучаемаго числа съ предшествовавшими ему числами.

Ученики разлагаютъ, напримѣръ, число 6 на его составныя части; получается табличка:

6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
6 = 2 + 2 + 2
6 = 3 + 3
6 = 4 + 2
6 = 5 + 1

На основаніи этой таблички предлагаются вопросы:

Сколько разъ нужно взять по два, чтобы составить 6? Нужно взять три раза по 2.

Какъ проще записать, что 6 состоитъ изъ 2, взятыхъ 3 раза? Если дѣти умѣютъ писать слова, то они вторую строчку приведенной таблички пишутъ сначала въ такомъ видѣ:

6 = 2, взятымъ 3 раза.

Потомъ учитель сообщаетъ, что эту строчку, то есть $6 = 2 + 2 + 2$, короче можно записать также при помощи условнаго знака, именно: $6 = 2 \times 3$. Выраженіе это ученики читаютъ такъ: „6 состоитъ изъ двухъ, взятыхъ 3 раза“ или „6 равно 2, повтореннымъ 3 раза“.

Для закрѣпленія въ памяти этого обозначенія ученикамъ предлагается также разложить, напримѣръ, число 8 на двойки и записать потомъ это разложеніе короче:

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$
$$8 = 2 \times 4$$

Число девять составить изъ троекъ, десять или пятерокъ, словомъ, до тѣхъ поръ, пока ученики будутъ вполнѣ безошибочно писать сокращенно составъ даннаго числа изъ другихъ равныхъ между собою чиселъ.

На основаніи одного изъ послѣднихъ разложеній, напримѣръ

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8,$$

ученики говорятъ, по вопросу учителя, что отъ 8 можно 2 отнять четыре раза и тогда въ остаткѣ не получится ничего, что обозначается *нулемъ*, значеніе котораго извѣстно уже ученикамъ изъ написанія десятковъ, гдѣ нуль, поставленный на мѣстѣ единицъ, показывалъ ихъ отсутствіе. Будучи знакомы также со знакомъ *минусъ*, ученики, по указанію учителя, пишутъ:

$$8 - 2 - 2 - 2 - 2 = 0$$

и читаютъ такъ: 8 безъ 2 будетъ 6, 6 безъ 2 будетъ 4, 4 безъ 2 будетъ 2, 2 безъ 2 ничего (нуль).

Слѣдовательно, сколько разъ 2 содержится въ 8? Два содержится въ 8 четыре раза.

Это короче записывается такимъ образомъ:

$$8 : 2 = 4$$

Выраженіе это записывается на классной доскѣ, и затѣмъ идутъ упражненія учениковъ въ написаніи на своихъ доскахъ выраженій, пока-

зывающихъ, сколько разъ 3 содержится въ 6, 4 въ 8, 2 въ 10, для усвоенія способа обозначенія.

Всѣ усвоенныя учениками обозначенія отношеній изучаемаго числа къ другимъ числамъ слѣдуетъ свести вмѣстѣ при одномъ какомъ-нибудь числѣ, чтобы ученики замѣтили отношеніе и связь одного числа съ другимъ. Это ведется такъ:

Составьте число 10 изъ двоекъ:

$$2+2+2+2+2=10$$

Прочтите это. Десять состоитъ изъ двухъ, двухъ и т. д., или два да два—четыре, четыре да два—шесть и т. д.

Запишите это короче.

$$10=2\times 5$$

Читается: 10 состоитъ изъ двухъ, взятыхъ пять разъ. Отнимайте отъ 10 по 2 до тѣхъ поръ, пока нельзя будетъ больше отнять.

$$10-2-2-2-2-2=0$$

Читается: 10 безъ 2 будетъ 8, 8 безъ 2 шесть и т. д.

Итакъ, сколько разъ можно отъ 10 отнять по 2? Слѣдовательно, сколько разъ 2 содержится въ 10? Запишите это.

$$10:2=5$$

Читается: въ 10 два содержится пять разъ.

Какъ видно, до сихъ поръ говорилось о письменномъ разложеніи только чиселъ кратныхъ для тѣхъ, на которыя они разлагаются, какъ, напримѣръ, разложеніе каждаго числа на единицы, 4 на 2, 6 на 2 и 3, 8 на 2 и 4, 9 на 3 и 10 на 2 и 5. Это потому, что, во-первыхъ, эти разложенія самыя важныя, ведущія къ усвоенію кратныхъ отношеній изучаемыхъ чиселъ, а во-вторыхъ, они и самыя легкія для написанія посредствомъ цифръ и знаковъ дѣйствій.

Теперь уже можно перейти и къ составленію чиселъ изъ такихъ, относительно которыхъ они не будутъ кратными, каковы: составленіе 3 изъ 2; 4 изъ 3; 7 изъ 2, 3, 4, 5, 6; 8 изъ 3; и т. д.

Напримѣръ, число семь составить изъ троекъ.

Пишется строчка:

$$7=3+3+1$$

Сколько разъ нужно взять по три и сколько еще прибавить, чтобы составилось семь? Запишите короче.

$$7=3\times 2+1$$

Отнимайте отъ семи по три.

7—3—3=1

Сколько разъ отъ семи можно отнять по три? Сколько получится въ остаткѣ, если отъ семи отнять два раза по три? Слѣдовательно, сколько разъ три содержится въ семи и какой еще будетъ остатокъ? Запишите короче.

7 : 3=2 (1)

Ученикамъ указывается, какъ писать остатокъ при числѣ, показывающемъ содержаніе.

Для закрѣпленія въ памяти дѣтей этого рода разложеній чиселъ и выводовъ изъ нихъ, дѣтямъ предлагается разложить еще другія числа и написать выводы изъ разложенія.

При достаточномъ числѣ подобнаго рода письменныхъ упражненій дѣти усвоиваютъ всѣ обозначенія, служащія для письменнаго выраженія различныхъ соотношеній чиселъ.

3) Устныя и письменныя упражненія въ бѣгломъ вычисленіи.

При изученіи чиселъ первой сотни дѣти производятъ много весьма разнообразныхъ упражненій съ числами. Результатомъ всѣхъ этихъ упражненій должны быть: основательное знакомство съ составомъ и соотношеніями чиселъ, выводъ правилъ и пріемовъ для вычисленій съ числами отвлеченными, а также навыкъ дѣтей вычислять быстро устно и письменно. А потому изученіе каждаго отдѣльнаго числа и цѣлой группы чиселъ должно сопровождаться и заканчиваться вычисленіями съ числами отвлеченными и упражненіями въ бѣгломъ вычисленіи.

Бѣглое вычисленіе состоитъ изъ трехъ родовъ упражненій: 1) бѣглое вычисленіе на задачахъ, 2) бѣглое вычисленіе на отвлеченныхъ числахъ и 3) устное и письменное вычисленіе численныхъ примѣровъ на отвлеченныя числа. Образцы первыхъ двухъ родовъ упражненій приведены мною въ достаточномъ количествѣ при каждомъ изъ чиселъ перваго десятка и указаны пріемы, какъ ими пользоваться. Для упражненія же дѣтей въ бѣгломъ вычисленіи на численныхъ примѣрахъ, послѣ ознакомленія ихъ на первомъ десяткѣ чиселъ съ цифрами и знаками дѣйствій, въ 1-й части Сборника, въ отдѣлѣ II (Примѣры для вычисленій) приведены таблички съ численными примѣрами на числа отъ 1 до 10 (всего 53 таблички, въ каждой по 10 строкъ). Таблички эти расположены слѣдующимъ образомъ: 1) семь табличекъ на сложеніе двухъ слагаемыхъ, двѣ

на сложеніе трехъ слагаемыхъ и одна на четыре слагаемыя; 2) десять табличекъ на вычитаніе одного числа, три на вычитаніе двухъ чиселъ изъ одного и одна на вычитаніе трехъ чиселъ; 3) шесть табличекъ на сложеніе и вычитаніе вмѣстѣ, начиная съ трехъ данныхъ чиселъ и кончая десятью; 4) шесть табличекъ на умноженіе и дѣленіе двухъ чиселъ; 5) одиннадцать табличекъ на всѣ четыре дѣйствія, начиная съ двухъ дѣйствій и кончая всѣми четырьмя дѣйствіями въ каждой строкѣ (въ этомъ отдѣлѣ введены скобки), и 6) шесть табличекъ съ неизвѣстнымъ числомъ не послѣ знака равенства, а въ началѣ или въ серединѣ строки.

Такимъ образомъ для вычисленій съ числами перваго десятка дано 530 строкъ, изъ которыхъ каждая представляетъ отдѣльный численный примѣръ.

Упражненія по этимъ табличкамъ могутъ быть слѣдующія:

1) Познакомившись съ цифрами и съ знакомъ +, дѣти читаютъ вслухъ первыя 10 табличекъ и вычисляютъ каждую строку устно. То же самое дѣлаютъ они съ табличками, относящимися къ знакамъ —, × и : . Читая строки и вычисляя ихъ, дѣти хорошо усвоиваютъ цифры и знаки дѣйствій и крѣпко запоминаютъ таблички всѣхъ дѣйствій съ двумя числами перваго десятка.

2) Производя вычисленія письменно, дѣти переписываютъ строки на свои грифельныя доски или въ тетради, вычисляютъ и послѣ знака равенства пишутъ полученное отъ вычисленія число. При этомъ они учатся правильно и четко писать цифры и знаки дѣйствій. Письменное вычисленіе табличекъ, какъ и письменное рѣшеніе практическихъ задачъ, представляетъ хорошее средство для самостоятельной работы дѣтей въ такихъ классахъ, гдѣ приходится учащихся распредѣлять на двѣ и на три группы и вести разнообразныя, но одновременныя, занятія со всѣми группами.

Сдѣланныя письменныя вычисленія необходимо провѣрять, заставляя различныхъ учениковъ читать отдѣльныя строки и во время чтенія вести самое вычисленіе. Иногда провѣрку можно производить, передавая работу одного ученика для провѣрки другому.

Для пріученія дѣтей къ пониманію значенія скобокъ нужно начинать съ простѣйшихъ строкъ и постепенно переходить къ болѣе и болѣе сложнымъ, какъ это указано самымъ расположеніемъ строкъ въ табличкахъ.

Учитель пишетъ на классной доскѣ строчку:

$$3 + (2 \times 3) = ?$$

и объясняетъ, что знакъ ( ) называется скобками и поставленъ для показанія, что прежде надо вычислить то, что надо прибавить къ 3-мъ,

то-есть 2×3, чтобы получить искомое число. Послѣ вычисленія того, что поставлено въ скобкахъ, строка эта пишется въ видѣ:

$$3 + 6 = ?$$

и наконецъ: $$3 + 6 = 9$$

Затѣмъ предлагается дѣтямъ написать безъ скобокъ нѣсколько слѣдующихъ строкъ, вычисливъ предварительно то, что поставлено въ скобкахъ, а потомъ указывается, что можно вести вычисленія и безъ письменной замѣны скобокъ вычисленными числами, то-есть писать, напримѣръ, сразу:

$$9 - (2 \times 4) = 1$$

3) Эти же таблички могутъ служить для задаванія учащимся внѣ классной работы.

Таблички съ ? въ серединѣ, или въ началѣ строки, могутъ быть предлагаемы только по окончаніи всѣхъ упражненій съ числами перваго десятка, такъ какъ опредѣленіе въ нихъ неизвѣстнаго числа требуетъ отъ вычисляющаго значительнаго соображенія и знакомства съ числами всего десятка. Лучше въ началѣ вести вычисленіе этихъ табличекъ устно, а потомъ уже, когда дѣти пріобрѣтутъ навыкъ обращаться съ ними, давать ихъ и для письменнаго вычисленія.

Въ этомъ случаѣ письменная работа должна состоять въ томъ, что дѣти вмѣсто данной въ Сборникѣ строки, напримѣръ,

$$8 - (3 \times ?) + 5 = 7$$

должны на своихъ доскахъ написать строку

$$8 - (3 \times 2) + 5 = 7$$

то-есть на мѣсто знака ? поставить 2.

Такимъ образомъ, достаточнымъ упражненіемъ въ устномъ и письменномъ вычисленіи табличекъ, послѣ всѣхъ предшествовавшихъ упражненій, учащіеся пріобрѣтаютъ окончательный навыкъ свободно и быстро производить вычисленія съ числами перваго десятка. Многіе учителя, для развитія этого навыка, считаютъ полезнымъ задавать дѣтямъ въ классѣ вычисленія подобныхъ табличекъ *на перегонку*, то-есть, предлагая, напримѣръ, вычислить 10 строкъ, обращаютъ вниманіе на то, кто скорѣе кончилъ вычисленія. Это побуждаетъ дѣтей къ нѣкотораго рода соревнованію.

4) Рѣшеніе задачъ.

Приведенныя мною письменныя упражненія, служащія для ознаком-

ленія учениковъ съ цифрами и знаками дѣйствій, для разнообразія классной работы должны чередоваться съ рѣшеніемъ задачъ, помѣщенныхъ въ концѣ отдѣла задачъ на числа отъ 1 до 10, начиная съ № 68 и до конца отдѣла. Задачи эти назначаются для повторенія всего отдѣла и, по содержанію своему, раздѣляются на два рода: однѣ требуютъ разложенія изученныхъ чиселъ на множители и слагаемыя, каковы неопредѣленныя задачи: №№ 68, 69, 70, 71, 72 и 74, другія заключаютъ въ себѣ простѣйшія дроби и требуютъ вычисленія частей изученныхъ чиселъ, каковы: №№ 73, 75, 76..........86.

Такимъ образомъ, на рѣшеніи этихъ задачъ повторяется самое важнѣйшее изъ пройденнаго курса, именно: составъ чиселъ и ихъ дѣлимость на своихъ производителей.

Для письменнаго рѣшенія, на этой ступени обученія дѣтей, могутъ быть пригодны преимущественно задачи неопредѣленныя. Привожу образецъ рѣшенія одной такой задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 69). Какъ можно раздѣлить девять листовъ бумаги между тремя учениками?

Ученики, усвоивъ содержаніе задачи, рѣшаютъ ее прямо письменно слѣдующимъ образомъ:

$$9 = 3 \times 3$$
$$9 = 1 \times 2 + 7$$
$$9 = 1 + 2 + 6$$
$$9 = 2 \times 2 + 5$$
$$9 = 1 + 3 + 5$$
$$9 = 2 + 3 + 4$$
$$9 = 4 \times 2 + 1$$

По требованію учителя рѣшенія эти читаются такъ: девять листовъ бумаги можно раздать тремъ ученикамъ, каждому по три листа; двоимъ по одному, а третьему семь; одному—одинъ листъ, другому два и третьему шесть; и т. д.

Потомъ, переходя отъ задачи къ числамъ отвлеченнымъ, прямо читаютъ написанную табличку такъ: девять состоитъ изъ трехъ разъ по три; изъ двухъ разъ по одному и семи; и т. д.

Такимъ образомъ, на изученіи чиселъ перваго десятка, кромѣ навыка мыслить и правильно и сжато выражать свою мысль, главнѣйшимъ образомъ усвоивается слѣдующее:

1) Различныя отношенія и связь между собою чиселъ перваго десятка.

2) Пріемъ увеличенія и уменьшенія даннаго числа какимъ-нибудь другимъ числомъ.

3) Увеличеніе и уменьшеніе даннаго числа въ нѣсколько разъ.

4) Опредѣленіе содержанія одного числа въ другомъ.

5) Опредѣленіе какой-нибудь части даннаго числа.

6) Умѣнье запомнать содержаніе задачи, разбивать ее на части и вести вычисленіе для ея рѣшенія.

7) Употребленіе цифръ и знаковъ дѣйствій сообразно извѣстной связи между числами.

8) Быстрое письменное и устное вычисленіе табличекъ.

9) Таблички сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія чиселъ въ предѣлѣ перваго десятка.

---

2) Изученіе чиселъ отъ 11 до 20.

Когда учащіеся достаточно ознакомились съ *десяткомъ* и его отношеніями къ предшествующимъ числамъ, можно употребить одинъ или два урока для счета десятками и объясненія ученикамъ, что отношенія между десятками опредѣляются точно такъ же, какъ и для единицъ. При этомъ для наглядности можно употреблять изъ ариѳметическаго ящика бруски, состоящіе изъ десяти кубиковъ. Тутъ же ученики повторяютъ пріемъ написанія десятковъ и отличаютъ значеніе изображеній, напримѣръ: 3 и 30.

Ариѳметическій ящикъ въ 1000 кубовъ заключаетъ въ себѣ 1000 кубиковъ въ такомъ составѣ: 1) 100 отдѣльныхъ кубиковъ для счета единицами; 2) 30 или 40 брусковъ, имѣющихъ длину равную длинѣ десяти кубиковъ, а ширину въ обѣ стороны равную ширинѣ одного кубика; каждый брусокъ по длинѣ раздѣленъ на 10 равныхъ частей черными черточками или надрѣзами, такъ что представляетъ собою десятокъ кубиковъ, сложенныхъ въ одинъ рядъ; бруски эти служатъ для счета десятками; 3) пять или шесть квадратныхъ досокъ, длина и ширина которыхъ равняется длинѣ бруска, а толщина—толщинѣ кубика; доски эти по обѣимъ квадратнымъ поверхностямъ раздѣлены черными чертами или надрѣзами на 100 квадратиковъ, а по ребрамъ—на 10 равныхъ частей, такъ что каждая доска представляетъ 100 кубиковъ, сложенныхъ въ одинъ слой въ видѣ квадрата; доски служатъ для счета сотнями.

Ребро основной единицы—кубика можетъ быть произвольной длины, но лучше если оно имѣетъ длину опредѣленную, равную какой-либо единицѣ или части единицы русской мѣры. Для класснаго употребленія удобнѣе имѣть кубикъ съ ребромъ въ дюймъ или въ полвершка.

Кромѣ описаннаго состава ариѳметическаго ящика, нѣкоторые ящики заключаютъ въ себѣ приспособленія для изученія дробей, именно: 1) нѣсколько брусковъ раздѣлены пополамъ и половины скрѣплены шипами; 2) нѣсколько брусковъ раздѣлены на пять равныхъ частей; 3) одна доска раздѣлена пополамъ и 4) одна доска раздѣлена на 4 равныя части. Если за основную единицу взять доску, то получаются такія части: половина, четверть, десятая часть единицы (брусокъ), двадцатая (половина бруска), пятидесятая (пятая часть бруска) и сотая (кубикъ). При неудобствѣ получить третьи, шестыя и другія доли, посредствомъ ариѳметическаго ящика нельзя произвести всѣхъ тѣхъ упражненій, которыя продѣлываются на дробныхъ счетахъ, гдѣ имѣются дѣленія единицы до 24-хъ долей. Тѣмъ не менѣе при неимѣніи дробныхъ счетовъ и на этомъ пособіи можно хорошо объяснить происхожденіе дроби и различныя ея свойства.

Ариѳметическій ящикъ можетъ служить также для нагляднаго выясненія понятія о квадратныхъ мѣрахъ и пріема вычисленія площади прямоугольника; но для большаго удобства въ этомъ отношеніи слѣдуетъ сдѣлать въ немъ нѣкоторое приспособленіе, нисколько не измѣняющее впрочемъ состава ящика. Доска, представляющая 100 кубиковъ и разграфленная по обѣимъ квадратнымъ поверхностямъ на 100 квадратиковъ, должна быть разграфлена только съ одной стороны, такъ что одна сторона (чистая) будетъ представлять измѣряемую поверхность, а другая (разграфленная) —ту же поверхность, выраженную въ квадратныхъ дюймахъ. Кромѣ того эта же доска дѣлится пополамъ и на четверти, такъ чтобы можно было имѣть для измѣренія длинные прямоугольники, составляемые изъ половины доски и изъ трехъ и четырехъ четвертей, сложенныхъ въ рядъ.

Само собою понятно, что ариѳметическій ящикъ можетъ служить и для выясненія состава куба и пріема измѣренія объема прямоугольной четырехгранной призмы. Для этого кубы и призмы составляются изъ отдѣльныхъ кубиковъ и измѣряются основною кубическою единицею—кубическимъ дюймомъ.

Обыкновенный ариѳметическій ящикъ употребляется премущественно для слѣдующихъ цѣлей: 1) для изученія чиселъ первой сотни и 2) для нагляднаго объясненія нумераціи и состава большихъ чиселъ.

При классномъ употребленіи ариѳметическаго ящика нужно сдѣлать приспособленіе классной доски такъ, чтобы удобно было выставлять на ней кубики, бруски и доски; для этого приготовляются доски съ горизонтальными планками, имѣющими ширину равную ребру кубика. Обыкновенная классная доска можетъ быть также удобно употреблена въ дѣло, если по краямъ ея вбить гвозди, на которые накладывать планки по мѣрѣ надобности.

Затѣмъ, прежде перехода къ изученію слѣдующихъ чиселъ по тѣмъ же упражненіямъ, по которымъ производилось изученіе чиселъ перваго десятка, слѣдуетъ остановиться на выясненіи ученикамъ пріема написанія двузначныхъ чиселъ и ихъ названій въ предѣлѣ чиселъ отъ 11 до 20. Работа эта ведется такимъ образомъ:

Напишите число десять. Прибавьте къ этому числу единицу. Ученики пишутъ 10 + 1.

Что означаетъ нуль, стоящій у первой единицы? Онъ означаетъ, что здѣсь только одинъ десятокъ и при немъ нѣтъ единицъ.

Какъ записать 10 + 1 вмѣстѣ, однимъ числомъ? Ученики пишутъ 11.

А если я къ десяти прибавлю двѣ единицы, какъ записать все полученное число? Ученики пишутъ 12.

Запишите на вашихъ доскахъ всѣ числа, которыя получатся, если къ десяти набавлять начиная отъ единицы до десяти. Ученики пишутъ числа отъ 10 до 19 включительно и затѣмъ, прибавляя къ десяти десять, получаютъ число двадцать, изображеніе котораго имъ уже извѣстно.

Учитель самъ объясняетъ ученикамъ названіе новыхъ чиселъ: *одиннадцать, двѣнадцать* и т. д.; и называетъ ихъ числами *двузначными* въ отличіе отъ прежнихъ—*однозначныхъ*.

Число 11.

1. Разложеніе на слагаемыя.

Зная хорошо составъ десяти изъ предшествующихъ ему чиселъ и то, что одиннадцать составляется прибавленіемъ къ десяти одной единицы, ученики легко сдѣлаютъ устное разложеніе одиннадцати, выражаясь такимъ образомъ: „11 состоитъ изъ 10 единицъ и еще одной, изъ пяти двоекъ и единицы, изъ трехъ троекъ и двухъ, изъ двухъ четверокъ и трехъ и т. д.“. Затѣмъ письменно составляется табличка разложенія числа въ порядкѣ:

$$
\begin{aligned}
11 &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1\\
11 &= 2+2+2+2+2+1\\
11 &= 3+3+3+2\\
11 &= 4+4+3\\
11 &= 5+5+1\\
11 &= 6+5\\
11 &= 7+4\\
11 &= 8+3\\
11 &= 9+2\\
11 &= 10+1
\end{aligned}
$$

На основаніи этой таблички учитель предлагаетъ ученикамъ первыя пять разложеній записать въ сокращенномъ видѣ:

$$11 = 1 \times 11$$
$$11 = 2 \times 5 + 1$$
$$11 = 3 \times 3 + 2$$
$$11 = 4 \times 2 + 3$$
$$11 = 5 \times 2 + 1$$

и вопросами наводитъ ихъ на нахожденіе въ этихъ и слѣдующихъ строкахъ таблицы разложеній одинаковыхъ, такимъ образомъ:

Прочтите вторую строку. Одиннадцать состоитъ изъ 2, взятыхъ пять разъ, и одного.

Гдѣ въ вашей таблицѣ есть разложеніе, похожее на это, но иначе записанное? Въ послѣдней строкѣ: вмѣсто 2, взятыхъ пять разъ, прямо написано 10 и въ пятой строкѣ вмѣсто 2, взятыхъ пять разъ, написано пять два раза.

Укажите разложеніе, одинаковое съ $11 = 3 \times 3 + 2$. Въ девятой строкѣ: $11 = 9 + 2$, гдѣ вмѣсто трехъ разъ по три прямо взято 9.

и т. д.

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе*. Сколько нужно прибавить къ одному, двумъ, четыремъ, семи и т. д., чтобы получить 11?

Изъ какихъ двухъ чиселъ составляется 11? Изъ какихъ трехъ чиселъ составляется 11?

Изъ какихъ двухъ равныхъ чиселъ и третьяго имъ неравнаго можно составить 11?

Какъ можно раздать 11 сливъ четыремъ мальчикамъ?

Сколько получится, если отъ 11 отнять 1, 3, 5, 8, 9?

Примѣчаніе. При рѣшеніи такихъ вопросовъ, какъ, например, сколько будетъ 8 да 3, или 11 безъ 5, необходимо съ перваго же раза пріучать дѣтей пользоваться десяткомъ, какъ единицею счета, и приводить вычисленіе къ этой единицѣ. Такъ, прибавляя 3 къ 8-ми, дѣти сначала прибавленіемъ 2-хъ дополняютъ 8 до 10-ти, а потомъ уже придаютъ 1, именно: $8+3=(8+2)+1=10+1=11$. Также вычисленіе $11-5$ приводится къ такому: $11-5=(11-1)-4=10-4=6$. Такой пріемъ вычисленія впослѣдствіи принесетъ большую пользу, научая дѣтей сводить всѣ вычисленія къ единицамъ десятичной системы нумераціи.

На сколько 11 болѣе 2, 4, 6, 7?

Чего не достаетъ 2, 5, 7, 9, 10 до 11-ти?

Какое число нужно отнять отъ 11-ти, чтобы въ остаткѣ получилось 3, 5, 8?

Умноженіе и *дѣленіе.* Сколько разъ нужно взять по одному, чтобы составить 11?

Сколько разъ 2, 3, 5, 7 содержится въ 11-ти, и какой остатокъ получается?

Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 11?

3) Задачи.

№№ 87 . . . . 91.

Письменное рѣшеніе задачи. Ученики достаточно ознакомились уже съ цифрами и знаками, выражающими различныя отношенія и комбинаціи чиселъ между собою, а потому можно исподоволь приступать къ записыванію вычисленій при рѣшеніи задачъ. Привожу образецъ первоначальной классной работы этого рода.

Задача. (Изъ сборника № 90). Кухарка получила отъ хозяйки три монеты по 2 коп. и еще одну монету большей цѣнности; на всѣ эти деньги она купила фунтъ керосину. Какую монету большей цѣнности получила она, если за фунтъ керосину заплатила 11 коп.?

Когда ученики рѣшили эту задачу и подробно высказали какъ пріемъ ея рѣшенія, такъ и вычисленія, имъ предлагаются вопросы:

Что узнали вы сначала для рѣшенія этой задачи? Сколько копеекъ содержатъ въ себѣ 3 монеты, въ двѣ копейки каждая.

Сколько копеекъ получили вы? 6 коп., потому что 3 раза 2 будетъ 6.

Запишите это вычисленіе на вашихъ доскахъ. Ученики пишутъ $2 \times 3 = 6$.

Что потомъ узнавали? Какая была еще одна монета. Какая же это была монета? 5 коп., потому что фунтъ керосину стоитъ 11 коп., значитъ кухаркѣ дали для покупки его 11 коп., изъ которыхъ въ трехъ монетахъ заключалось 6 коп., а въ четвертой остальное, то-есть 11 безъ 6, или 5 копеекъ.

Запишите это вычисленіе. Ученики пишутъ $11 - 6 = 5$.

Значитъ, сколько всѣхъ вычисленій сдѣлано для рѣшенія задачи? Сдѣлано два вычисленія.

Видно ли изъ того, что вы записали, въ какомъ порядкѣ сдѣланы вычисленія для рѣшенія этой задачи? Видно, что для рѣшенія задачи сначала взяли 3 раза 2, чтобы узнать, сколько было копеекъ въ трехъ монетахъ, и получили 6 коп.; потомъ эти 6 коп. отняли отъ 11 коп., чтобы узнать, сколько копеекъ было въ монетѣ большей цѣнности, и получили 5 коп.

Послѣ этого тотчасъ предлагается ученикамъ рѣшить другую задачу и записать въ порядкѣ вычисленія, уже безъ помощи наводящихъ вопросовъ учителя.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Изъ бывшихъ у меня 11 копеекъ я истратилъ 3 коп., потомъ еще 4; а когда мнѣ дали еще 6 коп., то я на всѣ свои деньги купилъ 5 кренделей. Сколько заплатилъ я за каждый крендель?

На голубятнѣ сидѣло 4 пары голубей; къ нимъ прилетѣло еще 3 голубя; потомъ сначала улетѣло 5 голубей, а послѣ еще 4. Сколько голубей осталось на голубятнѣ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 11 отнимаю 2, потомъ еще 3; къ полученному числу прибавляю 1; отъ полученнаго числа отнимаю 4. Сколько надо прибавить къ остатку, чтобы составилось 10?

Беру 3 раза 3 и прибавляю сюда два раза по одному; отъ полученнаго числа отнимаю два раза по 4 и остатокъ увеличиваю въ 2 раза. Сколько получилось?

в) *Вопросы для повторенія.* 11 безъ 7 сколько будетъ? 8+3? Сколько получится, если отъ 11 отнять 2 раза 4, 3 раза 2, 4 раза 2? Сколько надо отнять отъ 11, чтобы 4 заключалось въ остаткѣ два раза, 3 три раза, 2 пять разъ? и т. д. Сколько надо отнять отъ 11, чтобы остатокъ въ 10-ти содержался 2 раза?

г) *Примѣры для вычисленія.* Для числа 11, какъ и для всѣхъ слѣдующихъ до 30 включительно, въ Сборникѣ приведено двѣ таблички, въ каждой по 10 строкъ. Первая табличка требуетъ для вычисленія только сложенія и вычитанія, вторая—всѣхъ четырехъ дѣйствій.

Число 12.

Изученіе каждаго числа втораго десятка, какъ и прежде, начинается съ образованія числа, только теперь число образуется не прибавленіемъ единицы къ числу предшествовавшему, а прибавленіемъ соотвѣтствующаго числа единицъ къ 10. Такимъ образомъ, 12 составляется изъ 10+2, 13 изъ 10+3, 17 изъ 10+7 и т. д. Такой составъ числа облегчаетъ послѣдующія вычисленія.

1) Разложеніе.

Для повторенія порядка разложенія числа на слагаемыя ученикамъ предлагаются вопросы:

Сколько получится строчекъ въ таблицѣ разложенія числа 12 на составляющія его числа? 11 строчекъ.

Почему получится 11 строчекъ? Потому что числу 12 предшествуютъ 11 чиселъ, посредствомъ которыхъ его можно составлять.

Съ чего начать разложеніе? Съ разложенія 12 на единицы.

Изъ какихъ чиселъ 12 будетъ составляться въ четвертой строчкѣ? Изъ четверокъ.

Затѣмъ производится разложеніе или прямо устно, безъ помощи наглядныхъ пособій, или на наглядномъ пособіи. Привожу еще одинъ образецъ этой работы на ариѳметическихъ счетахъ.

Передъ урокомъ на 12 проволокахъ счетовъ надѣвается по 12 шаровъ на каждой. На верхней проволокѣ всѣ шары остаются сдвинутыми вмѣстѣ, представляя число 12 въ цѣлости. Ученикъ, вызванный къ счетамъ, разлагаетъ 12 на единицы, такъ что каждый изъ 12 шаровъ отдѣляется отъ другаго нѣкоторымъ промежуткомъ; другой ученикъ на третьей проволокѣ разлагаетъ 12 на двойки; третій—на четвертой проволокѣ—на тройки и т. д.; и послѣ всякаго разложенія, кто-либо съ мѣста, по указанію учителя, говоритъ, какъ разложено 12. Такъ, напримѣръ, одинъ ученикъ разложилъ на счетахъ 12 на 5+5+2, то другой съ мѣста говоритъ, что 12 состоитъ изъ двухъ пятерокъ и двойки

Когда разложеніе на счетахъ кончено и еще разъ обращено вниманіе учениковъ на самый порядокъ разложенія, ученики воспроизводятъ то же самое на своихъ доскахъ, то-есть составляютъ таблицу разложенія.

$$
\begin{aligned}
12 &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1\\
12 &= 2+2+2+2+2+2\\
12 &= 3+3+3+3\\
12 &= 4+4+4\\
12 &= 5+5+2\\
12 &= 6+6\\
12 &= 7+5\\
12 &= 8+4\\
12 &= 9+3\\
12 &= 10+2\\
12 &= 11+1
\end{aligned}
$$

Первые шесть рядовъ записываются и въ сокращенномъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
12 &= 1\times 12\\
12 &= 2\times 6\\
12 &= 3\times 4\\
12 &= 4\times 3\\
12 &= 5\times 2+2\\
12 &= 6\times 2
\end{aligned}
$$

Изъ сравненія второй строчки этой послѣдней таблицы съ шестою и третьей съ четвертою ученики убѣждаются, что изъ разложеній $12=2\times6$ или $12=3\times4$ сами собою вытекаютъ совершенно однозначущія съ ними разложенія $12=6\times2$ и $12=4\times3$. Обращая вниманіе на эту особенность состава чиселъ и при другихъ числахъ, ученики впослѣдствіи выведутъ теорему, что отъ перестановки множителей произведеніе не измѣняетъ своей величины.

Для закрѣпленія въ памяти этого важнѣйшаго свойства чиселъ, весьма облегчающаго запоминаніе таблицы умноженія чиселъ и пользованіе ею при вычисленіяхъ, ученики приводятъ примѣры подобныхъ же разложеній изъ пройденнаго курса и выписываютъ ихъ на доскахъ, каковы:

$$6=3\times2=2\times3$$
$$8=4\times2=2\times4$$
$$10=5\times2=2\times5$$

На основаніи сокращеннаго записыванія состава изучаемаго числа изъ другихъ ученики выводятъ кратныя отношенія этого числа къ другимъ. Такъ изъ того, что $10=5\times2$, ученики выводятъ, что $10:2=5$ и т. д.

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе*. Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 12? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ?

Сколько надо прибавить къ 4, 8, 10, чтобы получить 12?

На сколько надо увеличить 3, 5, 9, чтобы получить 12?

Какія равныя числа можно отнимать отъ 12 по нѣскольку разъ, чтобы не получалось остатка?

Отнимайте отъ 12 по 3, по 4, по 6.

Сколько будетъ: 12 безъ 3, 12 безъ 5, 12 безъ 8? и т. д.

Чѣмъ 12 больше единицы, 4, 5, 9?

Сколько надо отнять отъ 12, чтобы въ остаткѣ получилось 3, 7, 10?

Какимъ числомъ 12 больше 4, 6, 7?

Умноженіе и *дѣленіе*. Какое число нужно взять 2, 3, 4, 6 разъ, чтобы получилось 12?

Сколько разъ надо взять по 4, по 6, чтобы составить 12?

Сколько будетъ: 3-жды 4, 2-жды 6, 4-жды 3?

Какія числа содержатся въ 12 безъ остатка?

Какъ велика половина, треть, четверть, шестая, двѣнадцатая часть 12?

Сколько получится, если 12 уменьшить въ 3, 4 раза?

Во сколько разъ 12 больше 2, 6?
Какія числа содержатся въ 12 съ остаткомъ 2?

3) Задачи.

№№ 92, 93, ... 100.

Письменное рѣшеніе задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 100). 2 извощика на всѣхъ своихъ лошадяхъ взялись перевезти товаръ; у одного была тройка лошадей, а у другаго втрое болѣе. На сколькихъ телѣгахъ повезли они товаръ, если въ каждую телѣгу запрягли по парѣ лошадей?

Послѣ рѣшенія задачи и пересказа пріема рѣшенія и вычисленій, ученики записываютъ:

$$3 \times 3 = 9$$
$$3 + 9 = 12$$
$$12 : 2 = 6$$

Рѣшеніе задачи неопредѣленной. Весьма важное значеніе какъ для изученія числа со стороны разложенія его на множители и слагаемыя, такъ и для разнообразія упражненій съ числомъ, имѣютъ задачи неопредѣленныя, допускающія нѣсколько рѣшеній, удовлетворяющихъ вопросу задачи. Задачи эти особенно пригодны для письменнаго рѣшенія. Онѣ помѣщены въ „Сборникѣ" отчасти въ ряду другихъ задачъ, относящихся къ извѣстному числу, а преимущественно въ концѣ каждаго отдѣла задачъ на числа первой сотни передъ задачами на вычисленія съ частями изучаемыхъ чиселъ и легко могутъ быть узнаны учителемъ по самой формѣ вопроса, въ которомъ выраженіе „*сколько можно*" указываетъ на возможность различныхъ отвѣтовъ, могущихъ получиться при рѣшеніи одной и той же задачи.

Задача. 12 орѣховъ желаютъ раздать нѣсколькимъ мальчикамъ поровну. Сколько можетъ быть мальчиковъ и по скольку орѣховъ получитъ каждый?

Устное рѣшеніе. На вопросъ учителя, какъ рѣшается эта задача, одинъ ученикъ отвѣчаетъ: „если мальчиковъ будетъ 12, то каждый получитъ по одному орѣху, потому что 12 разъ одинъ составитъ 12". Другой ученикъ—„если мальчиковъ будетъ 6, то каждый получитъ по 2 орѣха, потому что 6 разъ 2 составляетъ 12". Третій—„если мальчиковъ будетъ 4, то каждый получитъ по 3 орѣха, потому что 4 раза 3 составляетъ 12" и т. д.

Письменное рѣшеніе. Послѣ устнаго рѣшенія этой задачи ученики записываютъ въ порядкѣ всѣ разложенія 12 на два множителя въ такомъ видѣ:

12 = 1 × 12
12 = 2 × 6
12 = 3 × 4
12 = 4 × 3
12 = 6 × 2
12 = 12 × 1

и, такимъ образомъ, еще разъ останавливаютъ свое вниманіе на составѣ числа и тѣмъ крѣпче запечатлѣваютъ въ памяти этотъ составъ.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У хозяйки было три фунта свѣчей, въ каждомъ по 4 свѣчи; въ одинъ вечеръ сгорѣло три свѣчи, въ другой двѣ и въ третій 3; потомъ она купила еще 6 свѣчей и всѣхъ свѣчей ей хватило на 5 вечеровъ, причемъ въ каждый вечеръ сгорало поровну. Сколько свѣчей сгорало въ каждый изъ послѣднихъ вечеровъ?

У мальчика было 12 сливъ; третью часть всѣхъ этихъ сливъ онъ отдалъ одному брату, четвертую часть—другому, шестую—сестрѣ, а остальныя сливы самъ съѣлъ. Сколько сливъ съѣлъ мальчикъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ 7 придаю 4 и еще одинъ; отъ полученнаго числа отнимаю 3 и еще 6; къ полученному числу придаю два раза по 2. Сколько получилось?

Беру половину 12; отнимаю отъ нея 4; къ остатку придаю треть 12 и еще шестую часть того же числа; отъ полученнаго числа отнимаю 5 и къ остатку придаю четверть 12. Сколько получилось?

в) *Вопросы для повторенія.* Сколько будетъ дважды шесть? Трижды четыре? Шестью два? Четырежды три? Сколько разъ шестая часть 12 содержится въ 10? Четвертая часть 12 въ 9? Третья часть 12 въ какомъ числѣ содержится два раза безъ остатка? Во сколько разъ 12 больше половины шести? Треть девяти какую составляетъ часть 12? и т. д.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 12.

Число 13.

1) Разложеніе.

13 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
13 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1
13 = 3 + 3 + 3 + 3 + 1
13 = 4 + 4 + 4 + 1
13 = 5 + 5 + 3

13 = 6 + 6 + 1
13 = 7 + 6
13 = 8 + 5
13 = 9 + 4
13 = 10 + 3
13 = 11 + 2
13 = 12 + 1

Первыя шесть строчекъ пишутся въ сокращенномъ видѣ и сравниваются по составу между собою и съ слѣдующими строчками. По мѣрѣ навыка учениковъ можно требовать отъ нихъ написанія и сразу въ сокращенномъ видѣ тѣхъ разложеній, которыя допускаютъ сокращенное написаніе.

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе.* Изъ какихъ равныхъ чиселъ можетъ быть составлено 13? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ?

Сколько надо придать къ 2, 5, 8, 11, чтобы получить 13?

Чѣмъ надо увеличить 3, 6, 9, чтобы получить 13?

Отнимайте отъ 13 по 3, по 4, по 5.

Какое число нужно отнять отъ 13 два, три, четыре, шесть разъ, чтобы въ остаткѣ получить единицу?

Сколько будетъ: 13—2, 13—7, 13—9?

Прим. 13—7 вычисляется такъ: 13—3—4 = 10—4 = 6.

Чѣмъ 13 больше 4, 6, 8, 10?

На какое число 2, 5, 7 меньше 13?

Умноженіе и *дѣленіе.* Сколько надо отнять отъ 13, чтобы въ остаткѣ получилось 6 × 2, 4 × 3, 5 × 2?

Сколько разъ 2, 3, 5, 7 содержится въ 13 и какой получается остатокъ?

На какія равныя части можно раздѣлить 13?

3) Задачи.

№№ 101, 102, 103, 104.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У хозяйки было 13 птицъ: 5 гусей, 4 куры, а остальныя утки; она купила еще двѣ утки, а потомъ еще четыре утки. Сколько у нея теперь утокъ?

Имѣя 13 листовъ бумаги, ученикъ сшилъ двѣ тетради, по 2 листа въ каждой, потомъ еще двѣ, по три листа, а, получивъ отъ отца еще

столько же листовъ, сколько у него осталось, сшилъ три тетради. Сколько листовъ пошло на каждую изъ послѣднихъ тетрадей?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 13 отнимаю 5, потомъ еще 3; къ остатку прибавляю 4; отъ полученнаго числа отнимаю 6 и полученное число вычитаю изъ 13. Сколько получилось въ остаткѣ?

Беру 3 раза 4 и прибавляю 1; отъ полученнаго числа отнимаю 5 разъ 2; къ остатку прибавляю 3 раза 3 и полученное число дѣлю на 4 равныя части. Какъ велика четвертая часть?

в) *Вопросы.* Какое число нужно прибавить къ 3×3, 2×4, чтобы получить 13? Сколько надо отнять отъ 13, чтобы получить остатокъ, равный 9—5? Сколько надо отнять отъ 13, чтобы остатокъ содержался въ 12 два раза? 13—8 сколько разъ содержится въ 10? 13—7 чѣмъ меньше 8 + 3? Какія числа содержатся безъ остатка въ 13—1, 13—3?

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 13.

Число 14.

1) Разложеніе.

Сначала ученики дѣлаютъ разложеніе числа устно или при помощи наглядныхъ пособій, къ которымъ вообще чѣмъ дальше, тѣмъ рѣже приходится прибѣгать; потомъ записываютъ таблицу разложенія прямо въ сокращенномъ видѣ:

14 = 1 × 14	14 = 8 + 6
14 = 2 × 7	14 = 9 + 5
14 = 3 × 4 + 2	14 = 10 + 4
14 = 4 × 3 + 2	14 = 11 + 3
14 = 5 × 2 + 4	14 = 12 + 2
14 = 6 × 2 + 2	14 = 13 + 1
14 = 7 × 2	

Изъ этой таблички выводятся отношенія чиселъ: 1) если, напримѣръ, 14 = 8 + 6, то 14 — 8 = 6 и 14 — 6 = 8; 2) если 14 = 2 × 7, то 14 : 7 = 2 и 14 : 2 = 7. То же повторяется и на послѣдующихъ числахъ.

2) Выводы.

Сложеніе и вычитаніе. Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 14? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ какихъ трехъ равныхъ и четвертаго имъ неравнаго числа?

Какое число нужно прибавить къ 3, 7, 9, чтобы получить 14?

Примѣч. Вопросъ, какое число надо придать къ 9, чтобы получить 14, рѣшается такъ: 9+1=10, а 10+4=14, слѣдовательно 9+5=14.

На сколько надо увеличить число 4, 8, 11, чтобы составить 14?

Сколько будетъ: 14—7, 14—9, 14—5, 14—12?

Сколько надо отнять отъ 14, чтобы получить 3, 5, 8?

Чѣмъ 14 болѣе 6, 9, 13?

Отнимайте отъ 14 по 3, по 5.

Умноженіе и *дѣленіе.* Какое число нужно взять два раза, 7 разъ, 14 разъ, чтобы составить 14?

Сколько разъ нужно отнимать отъ 14 по 3, чтобы въ остаткѣ получилось 2?

Если отъ 14 отнять 5, то полученное число во сколько разъ будетъ больше 3?

Сколько будетъ: дважды 7, семью 2?

Какія числа содержатся въ 14 безъ остатка? Какія числа содержатся съ остаткомъ 2?

На какія равныя части можно раздѣлить 14?

3) Задачи.

№№ 105, 106, 107, 108.

Устное рѣшеніе задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 108). Въ двухъ окнахъ 14 стеколъ, но въ одномъ изъ нихъ двумя стеклами болѣе, нежели въ другомъ. Сколько стеколъ въ каждомъ окнѣ?

Въ двухъ окнахъ 14 стеколъ, но въ одномъ изъ нихъ двумя стеклами болѣе, нежели въ другомъ. Если бы въ большомъ окнѣ было столько же стеколъ, какъ и въ меньшемъ, то въ обоихъ было бы 12, потому что 14 безъ 2 будетъ 12. Если въ двухъ окнахъ 12 стеколъ и въ каждомъ поровну, то въ одномъ окнѣ 6 стеколъ, потому что половина 12 будетъ 6. Итакъ, если бы окна были съ равнымъ числомъ стеколъ, то въ каждомъ было бы по шести стеколъ; но въ одномъ изъ нихъ двумя стеклами болѣе, нежели въ другомъ, значитъ въ большомъ окнѣ 8 стеколъ, потому что 6 да 2 будетъ 8.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* У ученика было 14 стальныхъ перьевъ, изъ которыхъ онъ 3 исписалъ и бросилъ, 4 потерялъ и 2 отдалъ товарищу; потомъ онъ еще получилъ 5 перьевъ, снова исписалъ 6 и бросилъ. Сколько перьевъ у него осталось?

У мальчика было 14 коп.; половину всѣхъ этихъ денегъ онъ издержалъ на покупку тетради, седьмую часть на крендель; потомъ, получивъ отъ отца еще двѣ монеты по 2 коп., купилъ на всѣ деньги 3 карандаша. Сколько заплатилъ онъ за каждый карандашъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 14 отнимаю 9; къ остатку прибавляю 6; отъ полученнаго числа отнимаю 8 и остатокъ отнимаю отъ 14. Сколько получилось?

Беру половину 14 и прибавляю къ ней пять; отъ полученнаго числа отнимаю седьмую часть 14 и еще 7. Сколько разъ полученное число содержится въ 12?

в) *Вопросы.* Сколько будетъ: дважды 7, семью 2? Сколько разъ можно отнять отъ 14 по 2, по 3, по 4, по 5, по 6? Седьмая часть 14 сколько разъ содержится въ 12? Половина 14 чѣмъ больше половины 10? Какая часть 8 содержится въ 14 безъ остатка? Во сколько разъ 14—2 больше 8—5? 11 безъ 4 какую составляетъ часть 14? и т. п.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 14.

Число 15.

1) Разложеніе.

15 = 1 × 15	15 = 8 + 7
15 = 2 × 7 + 1	15 = 9 + 6
15 = 3 × 5	15 = 10 + 5
15 = 4 × 3 + 3	15 = 11 + 4
15 = 5 × 3	15 = 12 + 3
15 = 6 × 2 + 3	15 = 13 + 2
15 = 7 × 2 + 1	15 = 14 + 1

Сравниваются строчки: вторая съ седьмою (2×7+1 и 7×2+1) и третья съ пятою (3×5 и 5×3).

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе.* Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 15? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ? Изъ какихъ двухъ равныхъ чиселъ и третьяго имъ неравнаго? Изъ какихъ трехъ равныхъ чиселъ и четвертаго имъ неравнаго?

Сколько надо придать къ 7, 10, 12, чтобы получить 15?

Сколько будетъ: 15 безъ 6, 15 безъ 9, 15 безъ 11, 15 безъ 13?

Сколько надо отнять отъ 15, чтобы въ остаткѣ получить 2, 7, 9, 14?

Чѣмъ 15 больше 4, 6, 8, 12?

Сколько разъ можно отнять отъ 15 по 2, по 3, по 4, по 5, по 6?

Умноженіе и *дѣленіе.* Сколько разъ надо взять по 3, по 5, чтобы получить 15?

Сколько будетъ: пятью три, трижды пять?

Во сколько разъ 15 больше 1, 3, 5?

Какъ велика третья, пятая часть 15?

Какія числа содержатся въ 15 съ остаткомъ 1?

3) Задачи.

№№ 109, 110,...... 114.

Вопросы по поводу рѣшенія задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 114). На какія монеты одинаковой цѣнности можно размѣнять пятиалтынный? На какія монеты неодинаковой цѣнности?

Какія вамъ извѣстны монеты меньшей цѣнности, чѣмъ пятиалтынный? Монета въ четверть-копейки (полушка), въ полкопейки (денежка), въ 1 коп., въ 2 коп., въ 3 коп., въ 5 коп. (пятачокъ) и въ 10 коп. (гривенникъ).

На какія 3 монеты одинаковой цѣнности можно размѣнять пятиалтынный? На 3 пятачка.

На какія 5 монетъ одинаковой цѣнности? На 5 монетъ въ 3 коп.

На какія еще монеты одинаковой цѣнности? На 15 монетъ въ 1 коп.

На какія 3 монеты неодинаковой цѣнности? Одна монета въ 2 коп., другая въ 3 коп. и третья въ 10 коп.

На какія 4 монеты? Одна монета въ 1 коп., другая—въ 1 коп., третья — въ 3 коп. и четвертая—въ 10 коп.; или одна монета въ 2 коп., другая—въ 3 коп., третья—въ 5 коп. и четвертая—въ 5 коп.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Одному мальчику дали одну монету въ 3 коп., а другую въ 10 коп.; онъ истратилъ сначала 4 коп., потомъ еще 2; затѣмъ снова ему дали одну монету въ 5 коп. и другую въ 3 коп., и онъ всѣ свои деньги промѣнялъ на одну монету. Какую монету получилъ мальчикъ?

Получивъ отъ отца 15 орѣховъ, дѣвочка дала брату третью часть, сестрѣ пятую часть; изъ остальныхъ 2 орѣха потеряла, 2 орѣха оказалось пустыхъ, а остальные она съѣла. Сколько орѣховъ съѣла дѣвочка?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Къ 9 прибавляю 4 и еще 2; отъ полученнаго числа отнимаю 8; къ полученному числу прибавляю 3 и все полученное число отнимаю отъ 15. Сколько получилось въ остаткѣ?

Беру пятую часть 15; придаю къ ней четвертую часть оставшагося числа и еще придаю третью часть оставшагося послѣ четвертой части; отъ полученнаго числа отнимаю третью часть 15. Сколько разъ полученное число содержится въ 12?

в) *Вопросы.* Сколько будетъ: 3-жды пять, пятью 3? Сколько надо отнять отъ 15, чтобы остатокъ содержался въ 12 четыре раза? Пятая часть 15 въ какихъ числахъ содержится безъ остатка? Третья часть 15 какую составляетъ часть 10? Сколько въ 15 десятковъ? На сколько и какія равныя части можно раздѣлить 15? Сколько надо отнять отъ 15, чтобы въ остаткѣ 4 и 6 содержались безъ остатка? и т. д.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 15.

Число 16.

1) Разложеніе.

16 = 1 × 16	16 = 9 + 7
16 = 2 × 8	16 = 10 + 6
16 = 3 × 5 + 1	16 = 11 + 5
16 = 4 × 4	16 = 12 + 4
16 = 5 × 3 + 1	16 = 13 + 3
16 = 6 × 2 + 4	16 = 14 + 2
16 = 7 × 2 + 2	16 = 15 + 1
16 = 8 × 2	

Сравненіе строчекъ: второй съ восьмою и третьей съ пятою и выводы разностнаго и кратнаго отношенія числа 16 къ другимъ числамъ.

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе.* Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 16? Изъ какихъ двухъ неравныхъ? Изъ какихъ двухъ равныхъ и одного имъ неравнаго числа?

Сколько надо придать къ 3, 5, 7, 11, чтобы получить 16? Сколько единицъ не достаетъ 4, 6, 9 до 16?

Сколько будетъ: 16 безъ 7, 16 безъ 9, 16 безъ 12, 16 безъ 14?

Сколько надо отнять отъ 16, чтобы въ остаткѣ получилось 3, 6, 10, 13?

На какое число 16 больше 2, 4, 7, 11, 15?

Какимъ числомъ 5, 8, 9 меньше 16?

Умноженіе и *дѣленіе.* Какое число нужно повторить нѣсколько разъ, чтобы получить 16?

Сколько будетъ: дважды 8, 4-жды 4, 8-ью 2?

Какія числа содержатся въ 16 безъ остатка?

Какія числа содержатся въ 16 съ остаткомъ 2, съ остаткомъ 4?

Сколько разъ 5, 7 содержится въ 16 и какой получается остатокъ?

Какъ велика половина, четверть, восьмая часть 16?

Во сколько разъ 16 больше 2, 8?

3) Задачи.

№№ 115, 116,...... 121.

Задача. (Изъ Сборника № 120). Торговецъ продаетъ каждые 4 грифеля по 3 коп., а покупаетъ каждые 8 грифелей по 5 коп. Сколько прибыли получитъ онъ, продавъ 16 грифелей?

Устно.

Планъ рѣшенія. Надо узнать, за сколько торговецъ продаетъ 16 грифелей, потомъ за сколько онъ самъ ихъ покупаетъ и, наконецъ, сколько получаетъ прибыли.

Рѣшеніе. Каждые 4 грифеля торговецъ продаетъ по 3 коп., а 4 содержится въ 16-ти 4 раза, значитъ онъ получаетъ съ покупателя 4 раза по 3 коп., то есть 12 коп. Самъ онъ платитъ за 8 грифелей 5 коп., а 8 содержится въ 16-ти 2 раза, значитъ онъ за 16 грифелей платитъ 10 коп., потому что два раза 5 будетъ 10. Итакъ, самъ онъ покупаетъ грифеля за 10 коп., а продаетъ за 12 коп., слѣдовательно прибыли получаетъ 2 коп., потому что 12 безъ 10 будетъ 2.

Письменно.

$$16 : 4 = 4$$
$$3 \times 4 = 12$$
$$16 : 8 = 2$$
$$5 \times 2 = 10$$
$$12 - 10 = 2$$

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Имѣя 8 монетъ по 2 коп., мальчикъ истратилъ 7 коп. на покупку тетради и 4 коп. на сухари; потомъ онъ получилъ

еще отъ отца 5 коп. и отъ матери 6 коп. и на всѣ свои деньги купилъ 4 яблока. Сколько платилъ онъ за яблоко?

Изъ 16 гостей, бывшихъ на вечерѣ, на половину были мужчины, четвертая часть — дамы, восьмая—дѣвочки, а остальные—мальчики. Сколько мальчиковъ было въ гостяхъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 16 отнимаю 9; къ полученному числу прибавляю 7 и снова отнимаю 9; къ полученному числу прибавляю 10 и снова отнимаю 8. Какое число получилось?

Задумано нѣкоторое число, къ которому если придамъ 5 и полученное число повторю два раза, то получится 16. Какое число задумано?

Возьмите четвертую часть 16; увеличьте ее въ 3 раза; полученное число раздѣлите пополамъ; полученную половину отнимите отъ 16 и къ остатку придайте 4. Какое число получилось?

в) *Вопросы.* Сколько будетъ 4-жды 4? 2-жды 8? 8-ью 2? На сколько и какія равныя части можно раздѣлить 16? Четверть 16 во сколько разъ меньше 12? Восьмая часть 16 какую составляетъ часть 10? Половина 8 какую составляетъ часть 16? Сколько надо отнять отъ 16, чтобы въ остаткѣ получилась половина 14? 11 безъ 3 сколько разъ содержится въ 16 и т. д.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 16.

Число 17.

1) Разложеніе.

$17 = 1 \times 17$	$17 = 9 + 8$
$17 = 2 \times 8 + 1$	$17 = 10 + 7$
$17 = 3 \times 5 + 2$	$17 = 11 + 6$
$17 = 4 \times 4 + 1$	$17 = 12 + 5$
$17 = 5 \times 3 + 2$	$17 = 13 + 4$
$17 = 6 \times 2 + 5$	$17 = 14 + 3$
$17 = 7 \times 2 + 3$	$17 = 15 + 2$
$17 = 8 \times 2 + 1$	$17 = 16 + 1$

Сравненіе строчекъ: второй съ восьмою и 16-ю; третьей съ пятою и 15-ою; шестой съ 12-ою.

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе.* Сложеніемъ какихъ двухъ чиселъ составляется число 17?

Примѣч. Первый отвѣтъ долженъ быть такой: 17 составляется изъ 10 и 7.

Изъ какихъ равныхъ чиселъ складывается 17? Изъ какихъ трехъ, пяти равныхъ чиселъ и одного имъ неравнаго числа?

Чего не достаетъ 8, 13, 15 до 17?

Сколько получится, если отъ 17 отнять 9, 13, 15?

Отнимайте отъ 17 по 2, по 5.

На сколько 17 больше 6, 8, 11?

Чѣмъ 7, 10, 12 меньше 17?

Сколько разъ отъ 17 можно отнять по 3, по 4, по 6, по 7 и какой получится остатокъ?

Умноженіе и *дѣленіе.* Сколько надо отнять отъ 17, чтобы въ остаткѣ получить 2-жды 8, 3-жды 5, 4-жды 4, 2-жды 6? и т. д.

Какія числа содержатся въ 17 нѣсколько разъ съ остаткомъ 1?

Сколько разъ въ 17 содержится 3, 5, 7 и какой получается остатокъ?

На сколько равныхъ частей можно раздѣлить 17?

3) Задачи.

№№ 122, 123 и 124.

Рѣшеніе неопредѣленной задачи.

Задача. Какъ можно разсадить 17 учениковъ на 5 скамейкахъ?

Задача эта назначается для всесторонняго разложенія числа 17 на пять слагаемыхъ. Такія задачи полезно предлагать ученикамъ, особенно при изученіи первоначальныхъ (простыхъ) чиселъ, какъ для устнаго, такъ и для письменнаго рѣшенія. Сначала задача рѣшается устно различными учениками, предлагающими различные способы разложенія числа. Отвѣтъ ученикъ формулируетъ такимъ образомъ: „На одну скамейку можно посадить 2-хъ учениковъ, на другую 3-хъ, на третью 4-хъ, на четвертую 5 и на пятую остальныхъ 3-хъ, учениковъ". Затѣмъ ученики записываютъ рѣшенія на доскахъ, располагая разложенія въ какомъ-либо порядкѣ или въ разбивку, и получаютъ таблицу въ родѣ слѣдующей:

$$1+2+3+4+7=17$$
$$1+3+4+5+4=17$$
$$1+4+5+6+1=17$$
$$1+5+6+2+3=17$$
$$2+3+4+5+3=17$$
$$2+4+5+1+5=17$$

$$4 \times 2 + 3 \times 3 = 17$$
$$3 \times 4 + 5 = 17$$
$$4 \times 4 + 1 = 17$$
$$3 \times 3 + 5 + 3 = 17$$
$$5 \times 3 + 1 \times 2 = 17$$

и т. д.

Какъ видно, на одномъ этомъ упражненіи, въ достаточной степени разработанномъ, ученики могутъ обстоятельно познать составъ числа 17 изъ другихъ чиселъ и его соотношенія со всѣми предшествовавшими числами. При письменномъ исполненіи этого упражненія учителю легко замѣтить, кто изъ учениковъ овладѣлъ числомъ и имѣетъ навыкъ въ вычисленіи и кто еще затрудняется, что видно какъ по числу сдѣланныхъ разложеній, такъ и по самымъ пріемамъ разложенія.

4) Бѣглое **вычисленіе.**

а) *На задачахъ.* На станціи было 17 лошадей; три лошади запрягли въ телѣгу, 4 въ коляску и 5 въ карету, а изъ оставшихся еще 2 лошади запрягли въ другую телѣгу. Сколько незапряженныхъ лошадей осталось на станціи?

У мальчика было въ лѣвой рукѣ 9 орѣховъ, а въ правой 17; изъ правой руки онъ переложилъ въ лѣвую сначала 5 орѣховъ, потомъ изъ каждой руки половину отдалъ своему товарищу, а всѣ оставшіеся орѣхи положилъ въ карманъ. Сколько орѣховъ положилъ мальчикъ въ карманъ?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 17 отнимаю 8, потомъ еще отнимаю 4; полученное число увеличиваю въ 3 раза и прибавляю 2; отъ полученнаго числа отнимаю 13 и остатокъ увеличиваю въ 4 раза. Какое число получилось?

Я задумалъ число, которое если увеличу въ два раза и придамъ къ полученному числу 5, то составится 17. Какое число я задумалъ?

Къ 9 придаю 5; къ полученному числу придаю пятую часть 15-ти; отъ полученнаго числа отнимаю 1 и остатокъ дѣлю на 4 равныя части. Какъ велика четвертая часть?

в) *Вопросы.* Какія числа мѣшаютъ 17-ти дѣлиться на 3, 4, 5, 6 равныхъ частей? Сколько надо отнять отъ 17, чтобы въ остаткѣ 2, 7, 8 содержалось безъ остатка? Какія числа содержатся въ 17 безъ остатка? 17 безъ 12 въ какихъ числахъ содержится безъ остатка? 17 безъ 9 во сколько разъ больше 2?

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 17.

Число 18.

1) Разложеніе.

18 = 1 × 18
18 = 2 × 9
18 = 3 × 6
18 = 4 × 4 + 2
18 = 5 × 3 + 3
18 = 6 × 3
18 = 7 × 2 + 4
18 = 8 × 2 + 2
18 = 9 × 2

18 = 10 + 8
18 = 11 + 7
18 = 12 + 6
18 = 13 + 5
18 = 14 + 4
18 = 15 + 3
18 = 16 + 2
18 = 17 + 1

Сравненіе строчекъ: второй съ девятою, третьей съ шестою, четвертой съ 16-ю, и т. д.

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе.* Изъ какихъ равныхъ чиселъ слагается 18? Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ можно составить 18? Изъ какихъ двухъ, трехъ, четырехъ равныхъ чиселъ и одного имъ неравнаго?

На какія три, четыре слагаемыя можно разложить 18?

Сколько будетъ 18 безъ 3, 4, 8, 9, 13?

Сколько разъ можно отъ 18 отнять по 3, по 4, по 6, по 8?

На какое число 18 больше 5, 7, 10, 14?

Чѣмъ 2, 6, 11, 15 меньше 18-ти?

На сколько надо уменьшить 18, чтобы получить 5, 7, 9?

Умноженіе и *дѣленіе.* Сколько разъ нужно взять по 2, по 3, по 6, по 9, чтобы получить 18?

Какія числа содержатся въ 18 безъ остатка?

Какъ велика половина, треть, шестая, девятая часть 18?-ти?

Сколько разъ въ 18 содержится 4, 5, 7 и какой получается остатокъ?

Во сколько разъ 18 больше 3, 9?

Два, шесть, девять какую часть 18-ти составляютъ?

3) Задачи.

№№ 125, 126, ... 134.

Письменное рѣшеніе неопредѣленной задачи.

Задача. (Изъ Сборника № 152). На сколько равныхъ кусковъ можно разрѣзать 18 аршинъ сукна, и сколько аршинъ будетъ въ каждомъ кускѣ?

Рѣшеніе: 18 = 1 × 18
18 = 2 × 9

$$18 = 3 \times 6$$
$$18 = 6 \times 3$$
$$18 = 9 \times 2$$

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Въ одномъ классѣ училища было 14 мальчиковъ, да къ нимъ еще поступили 4; всѣхъ мальчиковъ посадили на трехъ скамейкахъ, поровну на каждой. Когда нѣсколько мальчиковъ не явились въ классъ, то на первой скамейкѣ сидѣли только 4 мальчика, на второй 5, а на третьей 3. Сколько мальчиковъ не явились въ классъ въ этотъ день?

У дѣвочки было 18 коп.; девятую часть всѣхъ своихъ денегъ она отдала бѣдному, треть употребила на покупку яблокъ, шестую часть— на покупку булки. Сколько ей надо приложить къ оставшимся деньгамъ, чтобы купить 4 карандаша, по 3 коп. каждый?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 18 отнимите три раза 5; остатокъ увеличьте въ 6 разъ; отъ полученнаго числа отнимите 12; остатокъ увеличьте въ 3 раза. Какое получилось число?

Возьмите треть 18-ти; прибавьте къ полученному числу 3 и увеличьте полученное число въ 2 раза; отъ полученнаго числа возьмите шестую часть и придайте къ ней девятую часть того же числа. Какое составилось число?

в) *Вопросы.* На сколько и какія равныя части можно раздѣлить 18? Сколько будетъ: 2-жды 9, 3-жды 6, 6-ью 3? Половина 12-ти какую часть 18-ти составляетъ? Во сколько разъ половина 18-ти больше 5-ой части 15-ти? Треть какого числа нужно взять 6 разъ, чтобы получить 18? Девятая часть 18-ти сколько разъ содержится въ 14?

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 18.

Число 19.

1) Разложеніе.

$19 = 1 \times 19$	$19 = 10 + 9$
$19 = 2 \times 9 + 1$	$19 = 11 + 8$
$19 = 3 \times 6 + 1$	$19 = 12 + 7$
$19 = 4 \times 4 + 3$	$19 = 13 + 6$
$19 = 5 \times 3 + 4$	$19 = 14 + 5$
$19 = 6 \times 3 + 1$	$19 = 15 + 4$
$19 = 7 \times 2 + 5$	$19 = 16 + 3$
$19 = 8 \times 2 + 3$	$19 = 17 + 2$
$19 = 9 \times 2 + 1$	$19 = 18 + 1$

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе*. Къ 1, 3, 4, 5 какія числа нужно придать по нѣскольку разъ, чтобы составить 19?

Изъ какихъ чиселъ слагается 19?

Сколько надо придать къ 7 × 2, 3 × 6, 5 × 3, чтобы получить 19?

Чего не достаетъ 8, 13, 16 до 19?

Сколько останется, если отъ 19 отнять 6, 9, 12, 14, 17?

Какимъ числомъ 19 больше 5, 8, 11, 13, 16?

Сколько разъ надо отнимать отъ 19 по 2, по 3, по 6, по 9, чтобы въ остаткѣ получилась 1?

Какое число надо отнять отъ 19 два раза, четыре раза, чтобы въ остаткѣ получилось 3?

Сколько надо придать къ 2, 4, 10, 15, 18, чтобы получилось 19?

Умноженіе и *дѣленіе*. На какія равныя числа разлагается 19?

Какія числа мѣшаютъ составить 19 изъ нѣсколько разъ взятыхъ 3, 7, 9?

Сколько надо отнять отъ 19, чтобы въ остаткѣ 2, 3, 4, 5, 8, 9 содержалось безъ остатка?

Сколько надо отнять отъ 19, чтобы остатокъ дѣлился пополамъ, на 3, на 4, на шесть равныхъ частей?

Сколько разъ 6, 7, 10, 13 содержится въ 19-ти и какой получается остатокъ?

3) Задачи.

№№ 135, 136, 137 и 138.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ*. Крестьянину нужно было пройти 19 верстъ; въ первый часъ онъ прошелъ 4 версты, во второй 3, въ третій 5, въ четвертый 4, а остальное разстояніе прошелъ въ пятый часъ. Сколько верстъ прошелъ крестьянинъ въ послѣдній часъ?

Отецъ роздалъ 19 орѣховъ тремъ сыновьямъ; младшему далъ 3 орѣха, а всѣ остальные орѣхи раздѣлилъ поровну между двумя старшими братьями. Каждый изъ старшихъ братьевъ далъ младшему по 2 орѣха. Сколько орѣховъ оказалось у каждаго изъ сыновей?

б) *На отвлеченныхъ числахъ*. Отъ 19 отнимите 15; остатокъ увеличьте въ 4 раза; отъ полученнаго числа отнимите 9; остатокъ увеличьте въ 2 раза и прибавьте еще 4. Какое число получилось?

19 раздѣлите на три части. Какъ велика будетъ каждая часть?

в) *Вопросы*. Какія числа содержатся въ 19 безъ остатка? Сколько надо отнять отъ 19, чтобы треть полученнаго числа содержалась въ 12

два раза? Чѣмъ 19 безъ 8 больше 15 безъ 9-ти? Какое число надо прибавить къ 3-жды 4, чтобы получить 19? 19 безъ трехъ во сколько разъ больше четырехъ? и т. п.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 19.

Число 20.

1) Разложеніе.

20 = 1 × 20	20 = 11 + 9
20 = 2 × 10	20 = 12 + 8
20 = 3 × 6 + 2	20 = 13 + 7
20 = 4 × 5	20 = 14 + 6
20 = 5 × 4	20 = 15 + 5
20 = 6 × 3 + 2	20 = 16 + 4
20 = 7 × 2 + 6	20 = 17 + 3
20 = 8 × 2 + 4	20 = 18 + 2
20 = 9 × 2 + 2	20 = 19 + 1
20 = 10 × 2	

2) Выводы.

Сложеніе и *вычитаніе.* Изъ сколькихъ десятковъ составляется 20?

Изъ какихъ двухъ неравныхъ чиселъ слагается 20?

Изъ какихъ равныхъ чиселъ складывается 20?

Сколько надо придать къ 6 × 3, 7 × 2, 9 × 2, чтобы получить 20?

На сколько надо увеличить 9, 13, 16, чтобы составить 20?

Сколько будетъ 20 безъ 3, 5, 8, 12?

Чѣмъ 20 больше 4, 6, 9, 17?

Какимъ числомъ 7, 10, 15, 18 меньше 20-ти?

Сколько разъ можно отнять отъ 20 по 2, по 3, по 4, по 7?

Отнимите отъ 20 по 4, по 6.

Умноженіе и *дѣленіе.* Сколько разъ надо взять по 2, по 4, по 5, по 10, чтобы получить 20?

Какія числа содержатся въ 20 безъ остатка?

Сколько разъ въ 20 содержится 3, 6, 7, 8 и какой остатокъ получается?

Какъ велика половина, четверть, пятая, десятая часть 20?

Во сколько разъ 4, 5, 10 меньше 20?

3) Задачи.

№№ 139, 140, ... 150.

Задача. (Изъ Сборника № 145). Отецъ купилъ на 20 коп. яблокъ; всѣ эти яблоки онъ роздалъ четыремъ своимъ сыновьямъ такъ, что каждый младшій сынъ получилъ однимъ яблокомъ менѣе каждаго слѣдующаго за нимъ старшаго, а самый младшій сынъ получилъ только одно яблоко. Сколько яблокъ купилъ отецъ и почемъ платилъ онъ за каждое яблоко?

Устное рѣшеніе. Младшій сынъ получилъ одно яблоко, значитъ слѣдующій старшій $1+1=2$, слѣдующій $2+1=3$, наконецъ самый старшій $3+1=4$ яблока. Всѣ вмѣстѣ получили $1+2+3+4=10$ яблокъ. 10 яблокъ стоютъ 20 коп., то одно яблоко стоитъ 2 коп., потому что 10-я часть 20 будетъ 2.

4) Бѣглое вычисленіе.

а) *На задачахъ.* Въ трехъ комнатахъ было 20 стульевъ; въ одной комнатѣ 4 стула, въ другой 7 и въ третьей остальные; изъ первой комнаты перенесли въ третью 2 стула, а изъ второй 3. Сколько теперь стульевъ въ третьей комнатѣ?

Изъ 20 листовъ бумаги ученикъ сшилъ тетради; на одну пошла четвертая часть бумаги, а на другую пятая, на третью десятая часть, а изъ остальной бумаги онъ сшилъ еще 3 равныя тетради. Сколько листовъ пошло на каждую изъ послѣднихъ тетрадей?

б) *На отвлеченныхъ числахъ.* Отъ 20 отнимите 8; возьмите половину остатка и увеличьте его въ три раза; отъ полученнаго числа отнимите 2; полученное число раздѣлите на 4 равныя части. Сколько разъ четвертая часть содержится въ 20-ти?

Возьмите половину 20; придайте сюда десятую часть того же числа, потомъ пятую; полученное число раздѣлите пополамъ и половину отнимите отъ 20-ти. Сколько получилось въ остаткѣ?

в) *Вопросы.* Сколько будетъ: 2-жды 10, 4-жды 5, 5-ью 4? Сколько разъ четвертая часть 20 содержится въ 15? Во сколько разъ третья часть 12 меньше 20? На какія равныя части можно раздѣлить 20? 12 безъ 7 какую часть 20-ти составляетъ? Половина 20 во сколько разъ больше пятой части 10-ти? и т. п.

г) *Примѣры для вычисленій.* Двѣ таблички изъ Сборника на число 20 и еще четыре послѣднія изъ этого отдѣла таблички съ ? въ серединѣ.

Такимъ образомъ, на изученіи чиселъ отъ 1 до 20, въ первый годъ обученія, дѣти знакомятся съ главнѣйшими основными пріемами вычисленій и разсужденій при рѣшеніи теоретическихъ и практическихъ вопросовъ. Умѣя складывать числа въ родѣ $8+3$, $6+7$, $9+8$ и т. п., а также вычитать $13-8$, $16-9$, $15-6$ и т. п., ученики при изу-

ченіи послѣдующихъ чиселъ не будутъ затрудняться въ сложеніи и вычитаніи чиселъ двузначныхъ. Пріобрѣтя вообще навыкъ и пріемъ разсмотрѣнія и изученія числа, они легко могутъ теперь по тому же пріему разсматривать и изучать и числа большія.

Для повторенія всего пройденнаго курса, которое не можетъ занять много времени, такъ какъ при изученіи каждаго числа ученики постоянно встрѣчались со всѣми предшествовавшими ему числами, могутъ служить: во-первыхъ—вопросы на отвлеченныя числа, касающіеся преимущественно ихъ состава и взаимнаго отношенія, во-вторыхъ—вычисленіе формулъ и въ-третьихъ—рѣшеніе практическихъ задачъ. Для послѣдней цѣли въ концѣ рубрики *б* I-го отдѣла „Сборника“ помѣщены задачи на всѣ числа въ разбивку отъ 11 до 20, каковы: №№ 151, . . . 164. Для повторенія курса на отвлеченныхъ числахъ выбираются главнѣйшіе вопросы, въ родѣ слѣдующихъ:

Какъ 9 увеличить 7-ью?

Какъ узнать, чѣмъ 16 больше 9-ти?

Сколько будетъ: 2-жды 6, 3-жды 5, 3-жды 6? и т. п.

Въ какихъ числахъ 2 содержится безъ остатка?

Какія числа можно раздѣлить не 3 равныя части?

Какія числа нельзя дѣлить пополамъ безъ остатка?

и т. п.

На этихъ двухъ ступеняхъ обученія (изученіе чиселъ отъ 1 до 10 и отъ 11 до 20) ученики, какъ видно изъ расположенія и состава упражненій, усвоиваютъ въ памяти таблички сложенія, вычитанія и умноженія посредствомъ самыхъ упражненій, а не вслѣдствіе заучиванія ихъ наизустъ.

Въ этомъ курсѣ дѣйствія еще не выдѣляются, хотя ученики и теоретически, и практически достаточно хорошо усвоили различныя отношенія и связь чиселъ между собою, опредѣляемыя посредствомъ четырехъ дѣйствій. Обобщеніе этихъ отношеній въ дѣйствія было бы раннее и не вызывается необходимостью; достаточно, если дѣти хорошо постигнутъ самый смыслъ различныхъ отношеній и связи между числами.

ГОДЪ ВТОРОЙ.

А. Изученіе чиселъ отъ 21 до 100.

Послѣ подробнаго изложенія, въ предѣлѣ чиселъ отъ 1 до 21, всякаго рода упражненій, ведущихъ ученика къ полному знакомству съ числомъ, нѣтъ надобности въ такой же подробности излагать эти упраж-

нения и дальше для каждаго числа въ отдѣльности. Учитель, достаточно внимательно прослѣдившій изложеніе курса перваго года, легко можетъ примѣнить всѣ изложенныя упражненія для изученія дальнѣйшихъ чиселъ первой сотни. А потому я, при изложеніи первой половины курса этого года (изученіе чиселъ отъ 21 до 100), ограничусь только подробнымъ описаніемъ самыхъ упражненій и изложеніемъ тѣхъ теоретическихъ выводовъ, которые уже необходимо дѣлать на этой ступени обученія.

Но прежде, нежели перейти къ изложенію упражненій, необходимо предпослать нѣкоторыя замѣчанія:

1) Такъ какъ учащіеся изъ упражненій въ предшествовавшемъ курсѣ усвоили достаточно таблички сложенія однозначныхъ чиселъ и вычитанія однозначнаго числа изъ однозначнаго и двузначнаго (до 20), а также изъ рѣшенія многихъ задачъ и сравненія чиселъ ясно поняли различныя отношенія между числами, то не представляется уже необходимости изучать каждое число въ отдѣльности съ тою подробностію, съ какою изучались числа отъ 1 до 20. Относительно сложенія и вычитанія чиселъ этотъ курсъ требуетъ только приложенія усвоенныхъ уже учениками пріемовъ къ числамъ возрастающимъ. Относительно же умноженія и дѣленія чиселъ въ этомъ курсѣ приходится еще пройти многое.

2) А потому, преимущественное вниманіе въ этомъ курсѣ учитель долженъ обратить на основательное изученіе учениками чиселъ сложныхъ, каковы: 24, 30, 32, 36, 40, 45, 48 и т. д., и именно на изученіе ихъ со стороны дѣлимости на другія числа и со стороны состава ихъ изъ различныхъ множителей.

3) Къ нагляднымъ пособіямъ въ этомъ курсѣ приходится прибѣгать въ классѣ рѣже, нежели въ курсѣ предшествовавшемъ; въ случаѣ затрудненія учениковъ въ какомъ-либо вычисленіи можно производить это вычисленіе на классныхъ счетахъ или на кубикахъ. При этомъ, считаю долгомъ заявить, что если послѣ изученія первыхъ 20 чиселъ встрѣчается необходимость прибѣгать къ помощи наглядныхъ пособій, для изученія чиселъ до 100, то это есть явный признакъ того, что первыя 20 чиселъ пройдены худо.

4) Устное и письменное вычисленіе въ этомъ курсѣ должно идти равномѣрно, то-есть по количеству времени и упражненій.

Работы при изученіи чиселъ отъ 21 до 100 я для цѣльности излагаю въ видѣ отдѣльныхъ упражненій надъ всѣми числами отъ 21 до 100. Учитель самъ долженъ примѣнять эти упражненія къ тому или другому числу, при изученіи его въ классѣ.

1) Знакомство съ цѣлымъ десяткомъ.

Переходя къ изученію новаго десятка чиселъ, ученики знакомятся прежде всего съ составомъ цѣлаго десятка и потомъ уже приступаютъ къ болѣе подробному знакомству съ каждымъ числомъ этого десятка. Упражненія для знакомства съ десяткомъ располагаются такъ:

а) Прямой счетъ постепеннымъ прибавленіемъ по единицѣ въ предѣлѣ десятка, напримѣръ: 40, 41, 42, и т. д. до 50.

б) Обратный счетъ постепеннымъ отниманіемъ по единицѣ, напримѣръ: 50, 49, 48, и т. д. до 40.

в) Постепенное увеличеніе даннаго числа прибавленіемъ къ нему другаго даннаго до тѣхъ поръ, пока получится число, выходящее за предѣлъ изучаемаго десятка, напримѣръ, при изученіи чиселъ отъ 30 до 40, къ данному числу 5 и числамъ постепенно возрастающимъ прибавляется по 4:

$5+4=9$	$21+4=25$
$9+4=13$	$25+4=29$
$13+4=17$	$29+4=33$
$17+4=21$	$33+4=37$

г) Постепенное уменьшеніе какого-либо изъ чиселъ десятка отниманіемъ даннаго числа, напримѣръ:

$40-8=32$	
$32-8=24$	$16-8=8$
$24-8=16$	$8-8=0$

д) Писаніе чиселъ десятка при прямомъ и обратномъ порядкѣ счета и въ разбивку подъ диктовку учителя.

2) Разложеніе изучаемаго числа на слагаемыя и множители.

Послѣ предварительнаго бѣглаго знакомства съ десяткомъ, числа изучаются въ отдѣльности. При этомъ, надо раздѣлить числа на 3 группы: а) числа первоначальныя, б) числа сложныя, отличающіяся обиліемъ дѣлителей, каковы: 24, 30, 32, 36, 40, 45, 48 и проч., и в) числа сложныя, не столь замѣчательныя по своему составу изъ множителей, каковы: 21, 22, 25, 26, 27, 33 и проч. Числа первоначальныя изучаются преимущественно по своему составу изъ слагаемыхъ; на нихъ ученики упражняются въ сложеніи и вычитаніи чиселъ и чаще на числахъ

отвлеченныхъ въ видѣ примѣровъ, нежели на числахъ конкретныхъ посредствомъ задачъ. Вторая группа чиселъ изучается подробно посредствомъ всѣхъ упражненій, приведенныхъ въ первомъ курсѣ для каждаго числа. Преимущественное вниманіе при изученіи этихъ чиселъ обращается на ихъ дѣлимость и на составъ ихъ изъ множителей. При упражненіяхъ преобладаютъ числа конкретныя и задачи. Наконецъ, количество времени и упражненій, необходимое для знакомства учениковъ съ числами третьей группы, должно быть болѣе, нежели для чиселъ первой группы, и менѣе, нежели для чиселъ второй.

Упражненія въ разложеніи чиселъ на слагаемыя и множители могутъ быть *устныя* и *письменныя*.

а) *Устное разложеніе на слагаемыя* (число 23).

На вопросъ учителя, изъ какихъ двухъ чиселъ составляется 23, ученики отвѣчаютъ въ разбивку: „23 состоитъ изъ 20 и 3, изъ 5 и 18, изъ 8 и 15, изъ 11 и 12“ и т. д.

Примѣч. Первый составъ числа изъ двухъ слагаемыхъ всегда долженъ быть изъ десятковъ и единицъ.

Изъ какихъ трехъ чиселъ составляется 23? 23 составляется изъ $10+10+3$, изъ $2+3+18$, изъ $7+8+8$, изъ $8+11+4$ и т. д.

Тутъ же рѣшается вопросъ: можно ли составить 23 изъ равныхъ слагаемыхъ? Потомъ идутъ вопросы на вычитаніе: Сколько будетъ: 23—7, 23—9, 23—18? и т. д. Какое число нужно отнять отъ 23, чтобы въ остаткѣ получить 4, 7, 9, 15? и т. д.

б) *Письменное разложеніе на слагаемыя* (число 37).

Письменное разложеніе на два, на три и т. д. слагаемыя производится или по вышеприведеннымъ вопросамъ, отвѣты на которые ученики выписываютъ на своихъ доскахъ, или посредствомъ рѣшенія неопредѣленныхъ задачъ, что придаетъ работѣ большій интерессъ.

Задача. 37 копеекъ желаютъ раздать тремъ бѣднымъ непоровну. Сколько можетъ получить каждый бѣдный?

Рѣшеніе составляется учениками въ видѣ таблички:

$37=1+2+34$	$37=6+7+24$
$37=2+3+32$	$37=7+8+22$
$37=3+4+30$	$37=8+9+20$
$37=4+5+28$	$37=9+10+18$
$37=5+6+26$	$37=10+11+16$

и т. д.

Таблички эти составляются, по произволу учениковъ, или въ порядкѣ, въ родѣ того, который указанъ здѣсь, или въ разбивку.

Образцы задачъ для разложенія на слагаемыя.

1) 47 орѣховъ желаютъ раздать четыремъ мальчикамъ такъ, чтобы двое получили орѣховъ поровну, а остальные—непоровну. Сколько орѣховъ можетъ получить каждый мальчикъ?

2) Разнощикъ желаетъ разложить 53 яблока въ 4 корзины такъ, чтобы въ двухъ корзинахъ яблокъ было поровну, а въ остальныхъ двухъ—непоровну. Сколько яблокъ можетъ положить онъ въ каждую корзину?

3) Какъ можно поставить 59 мальчиковъ въ 4 ряда?

Упражненія въ разложеніи чиселъ на слагаемыя имѣютъ въ виду не столько полное знакомство учениковъ съ числомъ съ этой стороны, котораго нельзя и достигнуть на однихъ вышеприведенныхъ упражненіяхъ, сколько пріобрѣтеніе ими общаго пріема въ сложеніи и вычитаніи чиселъ.

Такимъ образомъ, слѣдуетъ добиваться, чтобы ученикъ сложеніе, напр. 27 и 39, производилъ устно такъ: 20 да 30 будетъ 50, 7 да 9=16, 50 да 16 составитъ 66.

Вычитаніе 27 изъ 42 ведется такъ: 42 безъ 20 будетъ 22; 22 безъ 7 будетъ 15. (Потому что 12—7=5, да еще 10, составится 15).

При этомъ, необходимо установить въ классѣ одинъ пріемъ сложенія и вычитанія чиселъ, допуская упрощеніе этихъ пріемовъ только въ частныхъ случаяхъ по указанію самихъ учениковъ.

в) *Устное разложеніе чиселъ на множители* (число 24) производится посредствомъ рѣшенія учениками частныхъ вопросовъ и постепеннаго ихъ обобщенія.

Скажите половину 24-хъ. (12). Четвертую часть. (6). Восьмую часть. (3). Какъ велика третья часть 24? (8). Шестая? (4). Двѣнадцатая? (2).

Слѣдовательно, какія числа содержатся въ 24 безъ остатка? (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24).

На какія равныя части можно раздѣлить 24? (На 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2).

Изъ сложенія какихъ равныхъ чиселъ составляется 24?

24 составляется изъ единицы, взятой 24 раза.

Изъ 2, взятыхъ 12 разъ
„ 3 „ 8 „
„ 4 „ 6 „

Изъ 6, взятыхъ 4 раза
„ 8 „ 3 „
„ 12 „ 2 „

Примѣчаніе. Въ случаѣ затрудненія учениковъ при изученіи состава числа изъ множителей, можно пользоваться классными счетами, употребляя ихъ двоякимъ образомъ: Напримѣръ, для числа 36. 1) На трехъ горизонтальныхъ проволокахъ надѣвается по 12 шаровъ, и тогда всѣ разложенія на множители производятся легко, именно:

$$36 = 12 \times 3$$
$$36 = 4 \times 9$$
$$36 = 6 \times 6$$
$$36 = 18 \times 2$$

Для втораго разложенія ученики на каждой проволокѣ разлагаютъ 12 шаровъ на 3 четверки; для третьяго—на каждой проволокѣ 12 шаровъ разлагаютъ на двѣ шестерки; для четвертаго—18 шаровъ сдвигаются въ одну сторону счетовъ, а другіе 18 въ другую.

2) На вертикальныхъ проволокахъ число 36 раскладывается по указанію учениковъ на мелкіе множители, такъ какъ тамъ на каждой проволокѣ нельзя помѣстить болѣе 10 шаровъ. Но вертикальныя проволоки представляютъ въ этомъ отношеніи то удобство, что съ нихъ скоро можно снимать шары во время самой работы и перекладывать съ одной проволоки на другую.

Вообще, при разложеніи такого числа, какъ напримѣръ 48, при помощи счетовъ, достаточно выставить его на четырехъ горизонтальныхъ проволокахъ, по 12 шаровъ на каждой. Затѣмъ всѣ прочія разложенія могутъ быть выведены учениками и безъ передвиженія шаровъ.

г) *Письменное разложеніе чиселъ на множители* производится или тоже въ видѣ письменнаго обобщенія частныхъ вопросовъ, или въ видѣ рѣшенія неопредѣленныхъ задачъ, требующихъ всесторонняго разложенія числа на два множителя.

Задача. Сколькимъ мальчикамъ можно раздать 48 орѣховъ поровну, и по скольку орѣховъ получитъ каждый?

Рѣшеніе.

$48 = 48 \times 1$	$48 = 6 \times 8$
$48 = 24 \times 2$	$48 = 4 \times 12$
$48 = 16 \times 3$	$48 = 3 \times 16$
$48 = 12 \times 4$	$48 = 2 \times 24$
$48 = 8 \times 6$	$48 = 1 \times 48$

Изъ такихъ табличекъ ученики выводятъ кратныя отношенія чиселъ, напримѣръ, если $48 = 16 \times 3$, то $48 : 3 = 16$ и $48 : 16 = 3$ и т. п.

Иногда слѣдуетъ начинать изученіе числа, со стороны его состава изъ множителей, изъ сравненія его съ однимъ изъ множителей. Такимъ образомъ, послѣ устнаго или письменнаго сравненія 56 съ 14 предлагаются вопросы: Сколько разъ 14 содержится въ 56? Какъ велика 4-я часть 56? Восьмая часть? Сколько разъ 7 содержится въ 56? Какія числа содержатся безъ остатка? На какія равныя части можно раздѣлить 56?

Зная изъ сравненія 56 съ 14, что 4-ая часть 56 будетъ 14, ученики говорятъ, что половина вдвое болѣе четвертой части, слѣдовательно будетъ 28, а восьмая часть вдвое менѣе четвертой, слѣдовательно будетъ 7; и т. д.

Такимъ образомъ, на основаніи сравненія числа съ однимъ изъ множителей, можно подробно разсмотрѣть составъ этого числа изъ различныхъ множителей и его дѣлимость на каждаго изъ своихъ множителей.

При устномъ сравненіи большихъ чиселъ съ малыми, напр. 92 съ 4-мя, упражненіе можно вести такъ: ученики по одиночкѣ отнимаютъ отъ 92 и чиселъ, получающихся отъ вычитанія, по 4; именно одинъ ученикъ говоритъ $92 - 4 = 88$, слѣдующій $88 - 4 = 84$, слѣдующій $84 - 4 = 80$ и т. д.

Затѣмъ ученики говорятъ, изъ сколькихъ четверокъ состоитъ 92, сколько разъ 4 содержится въ 92 и проч. До послѣднихъ отвѣтовъ, въ случаѣ затрудненія учениковъ, они доходятъ, сосчитывая число всѣхъ учениковъ, вычитавшихъ по 4 изъ 92.

3) Выводы.

Когда отдѣльныя числа или группа, состоящая изъ нѣсколькихъ чиселъ, разсмотрѣны со стороны состава ихъ изъ слагаемыхъ или множителей, предлагаются вопросы, служащіе для закрѣпленія въ памяти учащихся главнѣйшихъ соотношеній чиселъ. Безъ этого учащіеся будутъ затрудняться при рѣшеніи практическихъ задачъ, въ которыя входятъ эти соотношенія. Вопросы эти, по содержанію, совершенно сходны съ тѣми, которые приведены на всѣ четыре дѣйствія при каждомъ изъ первыхъ 20 чиселъ.

При рѣшеніи учащихся такихъ вопросовъ, надо обращать вниманіе, чтобы они всѣ вычисленія производили на основаніи десятичной системы

счисленія, приводя вычисленія къ дѣйствіямъ надъ десятками и единицами.

Привожу образцы вычисленій на всѣ дѣйствія.

Къ 35 придать 28. 30 и 20 будетъ 50; 5 и 8 = 13, а 50 да 13 составитъ 63; слѣдовательно 35 + 28 = 63.

Отъ 73 отнять 37. 73 безъ 30 будетъ 43; 43 безъ 7 будетъ 36; слѣдовательно 73—37 = 36.

17 взять 4 раза. 4 раза 10 будетъ 40; 4 раза 7 будетъ 28; 40 и 28 равно 68; слѣдовательно 4 раза 17 будетъ 68.

Найти 5-ую часть 65-ти. 5-ая часть 10-ти есть 2; 5-ая часть 60-ти есть 2×6=12; пятая часть 5-ти есть 1, 12+1=13; слѣдовательно 5-я часть 65 есть 13.

Найти 7-ую часть 84-хъ. 7-ая часть 70-ти есть 10, а 7-я часть 14 есть 2; слѣдовательно 7-ая часть 84-хъ есть 12.

Узнать, сколько разъ 8 содержится въ 56. 8 въ десяти содержится 1 разъ съ остаткомъ 2; 8 въ 50-ти содержится 5 разъ съ остаткомъ 2 × 5 = 10; 8 въ 16-ти содержится 2 раза; слѣдовательно 8 въ 56-ти содержится 5+2=7 разъ.

При рѣшеніи вопросовъ: сколько разъ одно число содержится въ другомъ, во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другаго, сколько получится, если данное число уменьшить во столько-то разъ, какъ велика такая-то часть даннаго числа, за лучшій пріемъ слѣдуетъ считать подъисканіе искомаго числа простымъ угадываніемъ и провѣркою. Такъ, напримѣръ, вопросъ: сколько разъ 8 содержится въ 56, рѣшается такъ: положимъ, что 8 въ 56 содержится 5 разъ; 5 разъ 8 будетъ 40, остается еще 16 (56 — 40), а въ 16-ти 8 содержится 2 раза, слѣдовательно въ 56-ти 8 содержится 5+2=7 разъ. Такой пріемъ сразу требуетъ отъ учащагося пользованія таблицею умноженія.

Для сообщенія ученикамъ пріема изученія чиселъ со стороны состава ихъ изъ множителей и дѣлимости ихъ на своихъ производителей, полезно вводить такого рода упражненія: положимъ дѣти изъ разложенія 28 узнали, что оно дѣлится на 7 равныхъ частей и что въ каждой части будетъ 4; предлагается вопросъ: „какъ составить слѣдующее послѣ 28 число, которое дѣлилось бы на 7 равныхъ частей, и сколько будетъ въ каждой 7-й части?“ (Число составляется такъ: 28 + 7 = 35.) Затѣмъ учащіеся составляютъ слѣдующее послѣ 35 число, дѣлящееся на 7, и, наконецъ, перечисляютъ одно за другимъ всѣ числа въ предѣлѣ 100, дѣлящіяся на 7 равныхъ частей безъ остатка. Такія же упражненія ведутся и при составленіи чиселъ, дѣлящихся безъ остатка на 2, 3, 4, 11 и т. д.

Изъ такихъ упражненій дѣти сами легко и незамѣтно выводятъ признаки дѣлимости чиселъ на 2, 4, 5, 10 и 11, а при нѣкоторой помощи учителя могутъ вывести признаки дѣлимости чиселъ на 3, 6, 8, 9. Если же нѣкоторые признаки подмѣчены учащимися, то дальнѣйшее изученіе чиселъ первой сотни идетъ быстрыми шагами.

4) Задачи.

Изученіе чиселъ на этой ступени обученія также сопровождается рѣшеніемъ соотвѣтствующихъ задачъ изъ „Сборника“, причемъ главнѣйшее вниманіе учитель обращаетъ не столько на число, сколько на раскрытіе учениками соотношеній между числами и условіями задачи, на правильное выраженіе ими плана рѣшенія задачи и на причину того или другаго пріема вычисленія. Иногда впрочемъ можно все изученіе какого-либо числа основать на рѣшеніи всей группы задачъ, относящихся въ „Сборникѣ“ къ этому числу, и потомъ уже сдѣлать обобщеніе относительно состава числа въ отвлеченномъ видѣ.

Задачи „Сборника“ составлены такъ, что въ группѣ задачъ, относящихся къ одному числу, охватываются всѣ его важнѣйшія отношенія къ предшествовавшимъ числамъ. Потомъ въ задачахъ другихъ отдѣловъ эти отношенія часто повторяются и прибавляются новыя; такъ, напримѣръ, въ отдѣлѣ *в* на число 24 имѣется 7 задачъ, но отношенія этого числа повторяются во всѣхъ слѣдующихъ отдѣлахъ въ задачахъ, относящихся къ другимъ числамъ.

При устномъ рѣшеніи задачи ученики, какъ и прежде, усвоивъ хорошо содержаніе задачи со словъ учителя, или прочитывая ее по „Сборнику“, производятъ вычисленія, даютъ отвѣты на вопросъ задачи и затѣмъ уже, по требованію учителя, высказываютъ планъ рѣшенія и всѣ вычисленія, сдѣланныя для рѣшенія задачи.

Письменное рѣшеніе можетъ быть въ двухъ видахъ: 1) послѣ устнаго рѣшенія задачи ученики записываютъ на своихъ доскахъ всѣ сдѣланныя вычисленія—въ видѣ повторенія продѣланнаго и для большаго закрѣпленія въ памяти пріема рѣшенія; 2) учителемъ указываются задачи изъ „Сборника“, и ученики сразу рѣшаютъ письменно одно или нѣсколько задачъ въ рядъ и потомъ, по требованію учителя, читаютъ написанныя рѣшенія и высказываютъ для чего и почему то или другое вычисленіе сдѣлано.

Письменное рѣшеніе задачи ведется въ томъ видѣ, какъ это было показано въ первомъ курсѣ, а когда ученики пріобрѣтутъ уже значительный навыкъ вообще въ рѣшеніи задачъ и въ письменномъ выраженіи всѣхъ вычисленій, тогда при изученіи послѣднихъ десятковъ первой сотни

можно перейти къ болѣе подробному письменному резюмированію рѣшенія задачъ въ видѣ полныхъ строчекъ. Причемъ ученикамъ обстоятельно выясняется составъ и значеніе каждой строчки.

Привожу образецъ такой работы.

Задача. (Изъ Сборника № 482). Крестьянинъ отправился изъ своей деревни въ городъ; первыя 45 верстъ онъ проѣхалъ со своимъ знакомымъ на телѣгѣ и каждый часъ дѣлалъ по 9 верстъ, а все остальное разстояніе до города прошелъ пѣшкомъ и дѣлалъ каждый часъ по 4 версты. Сколько всего времени былъ крестьянинъ въ дорогѣ, если отъ деревни до города 73 версты?

Послѣ устнаго рѣшенія задачи ученикамъ для написанія строчекъ предлагаются вопросы:

Какъ вы рѣшили задачу? Сначала узнали, во сколько часовъ крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ, потомъ сколько верстъ шелъ онъ пѣшкомъ, потомъ сколько часовъ шелъ онъ и, наконецъ, сколько всего времени былъ въ дорогѣ.

Значитъ, какія вычисленія сдѣлали вы? Сначала узнавали, сколько разъ 9 содержится въ 45, и получили 5, то-есть, что крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ въ 5 часовъ; потомъ отъ 73 отняли 45 и получили 28, то-есть число верстъ, которыя онъ прошелъ; затѣмъ узнали, сколько разъ 4 содержится въ 28, и получили 7, то-есть, что крестьянинъ шелъ 7 часовъ; наконецъ сложили 5 часовъ и 7 часовъ и получили, сколько всего времени былъ крестьянинъ въ дорогѣ.

Запишите все вычисленіе.

$$45 : 9 = 5$$
$$73 - 45 = 28$$
$$28 : 4 = 7$$
$$5 + 7 = 12$$

Итакъ, что вы узнавали первымъ вычисленіемъ? Узнавали, во сколько часовъ крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ.

Какъ бы записать полнѣе, чтобы видно было, во-первыхъ, что вы узнавали, во сколько часовъ крестьянинъ проѣхалъ 45 верстъ, во-вторыхъ, что для этого вычисляли, сколько разъ 9 содержится въ 45 и въ-третьихъ, что получилось 5 часовъ?

Послѣ нѣкоторой помощи учителя ученики пишутъ:

Крестьянинъ проѣхалъ 45 *верстъ въ* 45 : 9 = 5 *часовъ.*

Потомъ такимъ же образомъ устанавливается и написаніе остальныхъ трехъ строчекъ, которыя пишутся въ такомъ видѣ:

Крестьянинъ прошелъ пѣшкомъ 73 — 45 = 28 *верстъ;*
28 *верстъ онъ прошелъ въ* 28 : 4 = 7 *часовъ;*
всего былъ въ дорогѣ 5 + 7 = 12 *часовъ.*

Послѣ написанія строчекъ предлагаются вопросы:

Изъ скольких частей должна состоять каждая строчка? Изъ трехъ.

Что выражается въ первой части? Что узнается для рѣшенія задачи.

Во второй? Какое вычисленіе необходимо сдѣлать съ числами для опредѣленія искомаго.

Въ третьей? Какое число получается отъ вычисленія; оно-то и будетъ то число, которое нужно было найти.

Задача. (Изъ Сборника № 485). Одинъ покупатель купилъ у разнощика 5 яблокъ и 6 грушъ за 49 коп., а другой, по тѣмъ же цѣнамъ, купилъ 10 яблокъ и 6 грушъ за 74 коп. Почемъ продавалъ разнощикъ десятокъ грушъ и десятокъ яблокъ?

Письменное рѣшеніе.

Второй купилъ болѣе перваго на 10 — 5 = 5 яблокъ.
5 яблокъ стоютъ 74 — 49 = 25 коп.
10 яблокъ стоютъ 25 × 2 = 50 коп.
6 грушъ стоютъ 74 — 50 = 24 коп.
1 груша стоитъ 24 : 6 = 4 коп.
10 грушъ стоютъ 4 × 10 = 40 коп.

5) Бѣглое вычисленіе.

Бѣглое вычисленіе производится въ этомъ курсѣ преимущественно на числахъ отвлеченныхъ и служитъ для сообщенія ученикамъ навыка свободно обращаться съ числомъ. Состоитъ оно, какъ было объяснено уже въ первомъ курсѣ, въ томъ, что учитель медленно и раздѣльно говоритъ классу задачу, въ которой прямо указываются дѣйствія съ данными числами; ученики совершаютъ умственно названныя дѣйствія и даютъ отвѣтъ вслѣдъ за предложеніемъ учителемъ вопроса задачи. Если нѣкоторые ученики утеряли число, или не умѣли сдѣлать во-время вычисленія, то задача возстановляется и вычисленія производятся ими по частямъ. Въ первомъ курсѣ приведено мною достаточно примѣровъ для подобныхъ упражненій; примѣры эти могутъ служить образцами для составленія учителемъ во время урока подобныхъ же примѣровъ при изученіи чиселъ отъ 21 до 100. Здѣсь я приведу только образецъ особеннаго рода задачъ для бѣглаго вычисленія.

Одному ученику предлагается задумать число между какими нибудь предѣлами; напримѣръ, если изучены числа до 40, то число можетъ быть задумано между 20 и 40. Отъ задуманнаго числа ученикъ отнимаетъ число, указанное учителемъ, напримѣръ 17, полученное число увеличиваетъ въ два раза и говоритъ классу результатъ, который получилъ. Классъ обратнымъ вычисленіемъ долженъ узнать задуманное число. Работа эта очень интересуетъ учениковъ и весьма полезна, такъ какъ, во-первыхъ, основывается на обратныхъ повѣрочныхъ вычисленіяхъ и, во-вторыхъ, знакомитъ учениковъ, мало-по-малу, съ составомъ и анализомъ сложныхъ формулъ.

Задача. N! Задумайте четное число не больше 60 и не меньше 40; раздѣлите ваше число пополамъ и отъ полученной половины отнимите 16. Сколько получили вы?

Ученикъ говоритъ, положимъ, 12.

Рѣшеніе. 12 получилось, когда отъ половины задуманнаго числа отняли 16; значитъ, половина задуманнаго числа была $12 + 16 = = 28$; такъ какъ половина задуманнаго числа 28, то все число равно $28 \times 2 = 56$.

Задача. P! Задумайте число не больше 16 и не меньше 10; увеличьте ваше число въ 6 разъ; отъ полученнаго числа отнимите 39 и возьмите треть остатка. Какое число получилось?

Ученикъ говоритъ, положимъ, 15.

Рѣшеніе. 15 есть третья часть нѣкотораго числа, значитъ, само число равно $15 \times 3 = 45$; 45 получилось, когда отъ нѣкотораго числа отняли 39, значитъ, это число было $45 + 39 = 84$; 84 получилось, когда задуманное число увеличилось въ 6 разъ, значитъ, задуманное число въ 6 разъ менѣе 84, а 6-ая часть $84 = 14$; значитъ, задумано было 14.

Само собою разумѣется, что первыя упражненія въ этомъ родѣ должны быть простѣйшія и усложняться мало-по-малу, чтобы ученики могли хорошо выработать пріемъ обратнаго вычисленія.

Привожу примѣры для показанія постепенности ихъ усложненія.

1) Задумайте число не больше 30 и не меньше 20; отнимите отъ него 13. Какое число получилось? Классу: какое число задумано?

2) Возьмите число не больше 10; придайте къ нему 18. Какое число получилось? Классу: какое число задумано?

3) Возьмите число не больше 10; увеличьте его въ 6 разъ. Скажите полученное число. Какое число задумано?

4) Задумайте число, дѣлящееся на 8 безъ остатка; возьмите 4-ю часть вашего числа. Скажите полученное число. Какое число задумано?

5) Возьмите четное число; раздѣлите его пополамъ и къ половинѣ придайте 9. Какое число получилось? Какое число задумано?

6) Задумайте число не больше 20; увеличьте его въ 4 раза; отъ полученнаго числа отнимите 15. Скажите полученное число. Какое число было задумано?

7) Возьмите число не больше 17; увеличьте его въ 4 раза; отъ полученнаго числа отнимите 8; остатокъ раздѣлите пополамъ. Скажите полученное число. Какое число задумано?

8) Задумайте число не меньше 60, которое бы дѣлилось на 6 безъ остатка; возьмите третью часть вашего числа; придайте сюда 18; полученное число раздѣлите пополамъ; отъ полученнаго числа отнимите 13. Скажите, что получилось. Какое число задумано?

Такое усложненіе задачъ должно совершаться не въ одинъ и не въ два, три урока, а постепенно; такъ что упражненія эти предлагаются ученикамъ въ перемежку съ другими, исподоволь. Ученики, задумывающіе числа, постоянно мѣняются, и для нихъ-то эти упражненія особенно важны, такъ какъ сами они вычисляютъ въ прямомъ порядкѣ, а товарищи ихъ, отыскивающіе задуманное число, въ обратномъ; слѣдовательно тотъ и другой путь вычисленія и составъ формулы для этихъ учениковъ становятся совершенно ясными.

6) Вычисленіе примѣровъ.

Прежде перехода къ окончательнымъ выводамъ въ отвлеченномъ видѣ относительно выдѣленія дѣйствій и ихъ значенія, весьма важное упражненіе представляетъ чтеніе, писаніе подъ диктовку и вычисленіе примѣровъ съ отвлеченными числами. При этой работѣ ученики сжато намѣчаютъ отношенія и составъ отвлеченныхъ чиселъ и отъ этихъ отношеній впослѣдствіи легко переходятъ къ обобщенію ихъ въ дѣйствія и къ опредѣленію каждаго дѣйствія и его составныхъ элементовъ и результата. Опять-таки и эти упражненія чередуются съ другими и не должны составлять исключительнаго матеріала для одного урока.

а) *Чтеніе примѣра.*

Учитель пишетъ на доскѣ:

$$(65-48)+(13\times 4)-(56:8)=?$$

Ученики читаютъ: „отъ 65 отнять 48, къ полученному числу придать 13, взятое 4 раза, и отъ полученнаго числа отнять 8-ую часть 56-ти“.

б) *Писаніе примѣра подъ диктовку.*

Учитель диктуетъ: „36 увеличьте 25-ью; отъ полученнаго числа отнимите 6-ую часть 42-хъ и къ полученному числу придайте 32 безъ 19".

Ученики пишутъ:

$$(36 + 25) - (42 : 6) + (32 - 19) = ?$$

в) *Вычисленіе примѣра.*

Въ Сборникѣ задачъ и примѣровъ для вычисленій на каждое число отъ 21 до 50 приведено по двѣ таблички примѣровъ, въ каждой табличкѣ 10 или 8 строкъ, а на числа отъ 51 до 100 двѣ таблички приведены на каждую пару чиселъ, напримѣръ на 51 и 52, на 53 и 54 и т. д. Первая табличка требуетъ только сложенія и вычитанія чиселъ, вторая—всѣхъ четырехъ дѣйствій. Кромѣ того, въ концѣ каждаго десятка чиселъ приведено по три таблички примѣровъ, въ которыхъ неизвѣстное число входитъ въ формулу до знака равенства. Такимъ образомъ, учащіеся въ этихъ табличкахъ найдутъ весьма обильный матеріалъ для устныхъ и письменныхъ вычисленій съ отвлеченными числами.

Б. Выводъ и опредѣленіе четырехъ дѣйствій на основаніи изученія чиселъ первой сотни.

Понятія о необходимости дѣйствій, о значеніи каждаго дѣйствія и распредѣленіе дѣйствій выводятся прямо изъ всѣхъ упражненій съ числомъ во время изученія или послѣ изученія чиселъ первой сотни, когда ученики уже вполнѣ хорошо освоились со всѣми отношеніями и комбинаціями чиселъ между собою. Упражненіе въ выдѣленіи дѣйствій составляетъ хорошее повтореніе проходимаго курса. Сначала при разложеніи и сравненіи между собою чиселъ, а также при рѣшеніи задачъ и вычисленіи формулъ, ученики знакомятся съ простѣйшими понятіями: къ одному числу прибавить другое число, одно число да другое число, соединить два или нѣсколько чиселъ въ одно число, увеличить одно число другимъ числомъ, придать, отнять, уменьшить одно число другимъ числомъ, узнать, чѣмъ одно число больше другаго, увеличить число въ нѣсколько разъ, повторить, взять нѣсколько разъ, уменьшить число въ нѣсколько разъ, раздѣлить число на равныя части, узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другаго и т. п.

Потомъ, по мѣрѣ упражненій, понятія эти они, незамѣтно для самихъ себя, группируютъ въ болѣе общія и безошибочно совершаютъ одно и то же дѣйствіе съ числомъ, когда напримѣръ его нужно повторить нѣсколько разъ, увеличить въ нѣсколько разъ, взять нѣсколько разъ, и обозначаютъ это дѣйствіе въ различныхъ его значеніяхъ однимъ и тѣмъ же знакомъ. Такимъ образомъ, составляется въ сознаніи ученика общее понятіе о дѣйствіи надъ числомъ. За образованіемъ и совершеннымъ укрѣпленіемъ въ сознаніи учениковъ этого понятія слѣдуетъ составленіе системы, то-есть выдѣленіе различныхъ дѣйствій въ принятомъ порядкѣ ихъ расположенія; послѣ чего становится совершенно естественнымъ дать ученику и обобщенныя названія цѣлыхъ группъ частныхъ понятій, т.-е. названія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе. Легко затѣмъ выдѣлить элементы и результаты дѣйствій (слагаемыя, сумма, вычитаемое, разность и проч.), установить между ними взаимную связь и вывести опредѣленія какъ самыхъ дѣйствій, такъ и ихъ элементовъ.

Перехожу къ болѣе подробному изложенію работы при выдѣленіи каждаго дѣйствія.

Сложеніе.

Учитель диктуетъ ученикамъ: напишите 15 да 18 и сколько получится. (15 + 18 = 33.) Къ 29 прибавить 46. (29 + 46 = 75.) 34 увеличить 27-ью. (34 + 27 = 61).

Почему вы во всѣхъ случаяхъ поставили одинъ и тотъ же знакъ +? Потому что во всѣхъ этихъ случаяхъ нужно было къ одному числу прибавлять другое, что означается однимъ и тѣмъ же знаковъ +.

Въ какихъ же случаяхъ между двумя числами ставятъ знакъ +? Когда нужно къ одному числу прибавить другое, когда два числа нужно сложить въ одно число, когда одно число нужно увеличить другимъ числомъ.

Учитель пишетъ на доскѣ:

$$36 + 45 = 81$$

Какъ прочесть это выраженіе?

36 да 45 будетъ 81; если къ 36 прибавить 45, то получится 81; если 36 увеличить 45-ью единицами, то получится 81; 36, сложенное съ 45-ью, даетъ 81 и проч.

Какъ вы будете вычислять, если нужно къ 27 прибавить 43? Мы два числа сложимъ въ одно число такъ: 20 да 40 будетъ 60, 7 да 3 будетъ 10, а 60 да 10 составляетъ 70; слѣдовательно 27 да 43 составляетъ 70.

А если нужно 27 увеличить 43-мя единицами?

Вычисленіе будетъ одно и то же.

Замѣтьте, что вычисленіе съ числами называютъ обыкновенно *дѣйствіемъ*. Какое же дѣйствіе вы сдѣлали съ числами 27 и 43?

Мы сдѣлали *сложеніе*; эти два числа сложили въ одно число и получили 70.

Можно ли производить сложеніе нѣсколькихъ чиселъ, болѣе двухъ? Напишите примѣръ, въ которомъ бы нѣсколько чиселъ складывались вмѣстѣ.

$$5 + 17 + 36 + 19 = 77$$

Скажите, когда нужно надъ числами производить сложеніе? (Ученики повторяютъ различные случаи, говоря: съ числами производится сложеніе, когда нѣсколько чиселъ нужно соединить въ одно число, когда и т. д.). Составьте задачу, для рѣшенія которой нужно было бы сложить числа.

Ученики приводятъ задачи въ родѣ слѣдующихъ:

„Одному сыну отецъ далъ 12 орѣховъ, другому 15 и третьему 18. Сколько орѣховъ роздалъ отецъ тремъ сыновьямъ?“

„У одного мальчика было 25 коп., а у другаго 8-ью копейками болѣе. Сколько было денегъ у втораго и сколько у обоихъ?“

По поводу, напримѣръ, первой задачи учитель спрашиваетъ, почему для рѣшенія ея нужно числа складывать. Потому что здѣсь нужно узнать число орѣховъ, розданныхъ тремъ сыновьямъ, значитъ 12, 15 и 18 нужно соединить въ одно число, нужно вмѣстѣ сложить.

Какое же дѣйствіе съ числами мы будемъ называть сложеніемъ?

Сложеніемъ называется дѣйствіе, по которому два или нѣсколько чиселъ соединяются въ одно число.

Замѣтьте, что числа, которыя складываются, называются *слагаемыми*, а число, получающееся отъ сложенія слагаемыхъ, называется *суммою*.

Число 85 есть сумма какихъ двухъ чиселъ?

Число 97 есть сумма какихъ трехъ слагаемыхъ?

Составить сумму изъ слагаемыхъ: 34, 28 и 19.

Затѣмъ идетъ повтореніе пройденнаго на составленіи примѣровъ и задачъ на сложеніе чиселъ, и на рѣшеніи вопросовъ: какое дѣйствіе называется сложеніемъ, когда употребляется сложеніе, какія числа называются слагаемыми, какое число называется суммою?

Вычитаніе.

Напишите: отъ 43 отнять 27 (43—27=16); 65 уменьшить 48-ью (65—48=17); изъ 97 вычесть 39 (97—39=58); на сколько 56 болѣе 37? (56—37=19).

Почему вы во всѣхъ этихъ случаяхъ поставили между числами одинъ и тотъ же знакъ—? Потому что во всѣхъ этихъ случаяхъ приходится изъ одного числа вычитать, отнимать другое число, что означается знакомъ —.

Слѣдовательно, какъ вы прочтете такое выраженіе: 81 — 65 = 16?

81 безъ 65 даетъ 16; если отъ 81 отнять 65, то получится 16; если 81 уменьшить 65-ю единицами, то получится 16; 81 больше 65 на 16 единицъ.

Какъ вы будете вычислять, если я скажу: изъ 72 вычесть 46?

72 безъ 40 будетъ 32, 32 безъ 6 будетъ 26.

А если я скажу: 72 уменьшить 46-ю единицами.

Вычисленіе будетъ то же, такъ какъ все-таки изъ 72 придется вычесть 46.

Какое же дѣйствіе дѣлаемъ мы въ этихъ случаяхъ съ числами 72 и 46?

Вычитаніе; изъ 72 вычитаемъ 46.

Чѣмъ это дѣйствіе отличается отъ сложенія?

Тѣмъ, что въ сложеніи мы изъ нѣсколькихъ чиселъ составляемъ одно число, къ одному числу прибавляемъ другое, значитъ, его увеличиваемъ, а вычитаніемъ мы число уменьшаемъ.

Скажите, въ какихъ случаяхъ приходится изъ одного числа вычитать другое?

Изъ одного числа приходится вычитать другое, когда данное число нужно уменьшить на какое-нибудь другое число, когда отъ одного числа нужно отнять другое, когда нужно узнать, на сколько одно число больше или меньше другаго.

Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы изъ одного числа вычесть другое.

Ученики приводятъ задачи:

„Мальчикъ, имѣя 28 сливъ, далъ своему товарищу 15 сливъ. Сколько сливъ у него осталось?“

„У одного мальчика было 36 коп., а у другаго 17-ю копейками менѣе. Сколько денегъ было у втораго?“

Въ двухъ классахъ училища 70 учениковъ; въ одномъ изъ нихъ 36. Сколько въ другомъ?“

Какое дѣйствіе съ числами мы будемъ называть *вычитаніемъ?*

Вычитаніемъ называется дѣйствіе, по которому отъ одного числа отнимается другое число, или узнается, чѣмъ одно число больше или меньше другаго.

Что дѣлается съ числомъ, когда изъ него вычитаютъ другое число?

Число уменьшается.

Замѣтьте, что число, изъ котораго вычитаютъ другое число, называется *уменьшаемымъ;* число, которое вычитаютъ, называется *вычитаемымъ.* А какъ назвать число, полученное отъ вычитанія?

Остаткомъ.

Остатокъ называютъ также *разностью.* Почему?

Потому что, вычитая одно число изъ другаго, мы узнаемъ также, на сколько одно число больше или меньше другаго, на сколько одно число *разнится* отъ другаго.

Число 17 можетъ быть разностью какихъ двухъ чиселъ?

Число 29 можетъ быть разностью какихъ двухъ чиселъ?

Уменьшаемое 74, разность 37, какъ велико вычитаемое?

Вычитаемое 45, разность 29, какъ велико уменьшаемое?

Затѣмъ слѣдуетъ повтореніе на упражненіяхъ и вопросахъ, въ родѣ тѣхъ, которые приведены въ отдѣлѣ „сложеніе".

Для закрѣпленія въ памяти и сознаніи учениковъ значенія дѣйствій сложенія и вычитанія и для большей наглядности ихъ различія, ученикамъ предлагаютъ составлять задачи, для рѣшенія которыхъ пришлось бы совершать оба дѣйствія.

Образецъ задачъ.

„Крестьянинъ имѣлъ 8 четвертей овса и еще со своего поля собралъ 13 четвертей; изъ этого овса онъ продалъ 17 четвертей. Сколько овса у него осталось?"

„Разнощикъ, имѣя 76 коп., купилъ десятокъ апельсиновъ за 45 коп. и продалъ ихъ самъ за 60 коп. Сколько теперь у него денегъ?"

Умноженіе.

Учитель пишетъ на доскѣ:

$$12 \times 6 = 72$$

и спрашиваетъ, какъ прочесть это выраженіе.

6 разъ 12 будетъ 72; если 12 взять, повторить, сложить 6 разъ, то получится 72; если 12 увеличить въ 6 разъ, то получится 72.

Какъ вычисляете вы 7 разъ 14?

7 разъ 10 будетъ 70, да 7 разъ 4 будетъ 28, а 70 да 28 составитъ 98.

Какъ еще иначе можно вычислить 7 разъ 14?

Можно сложить 7 разъ по 14 такъ: 14 да 14 будетъ 28, 28 да 14 будетъ 42 и т. д.

Значитъ, какимъ дѣйствіемъ произвели вы это вычисленіе?

Сложеніемъ.

Что особеннаго замѣчаете вы въ этомъ сложеніи?

Всѣ слагаемыя равны, число складывается нѣсколько разъ само съ собою.

Вычислите 18×5 по двумъ пріемамъ.

5 разъ 10 будетъ 50 и 5 разъ 8 будетъ 40, 50 да 40 составляетъ 90.

18 да 18 будетъ 36, 36 да 18 будетъ 54, 54 да 18 будетъ 72, а 72 да 18 составитъ 90; слѣдовательно 5 разъ 18 составитъ 90.

По какому изъ этихъ двухъ пріемовъ удобнѣе и скорѣе вычислять и почему?

По первому: тамъ мы сразу узнаемъ сумму, а здѣсь постепенно нужно набавлять число.

Перечислите, въ какихъ случаяхъ приходится дѣлать вычисленіе съ числами по первому пріему.

Когда нужно одно число сложить само съ собою нѣсколько разъ, когда нужно число увеличить въ нѣсколько разъ.

Замѣтьте, что дѣйствіе, посредствомъ котораго производится это вычисленіе, называется *умноженіемъ*.

Итакъ, скажите, какое дѣйствіе называется умноженіемъ?

Умноженіемъ называется дѣйствіе, посредствомъ котораго число увеличивается въ нѣсколько разъ.

Число, которое увеличиваютъ въ нѣсколько разъ, которое множатъ, называется *множимымъ*, число, на которое множатъ, называется *множителемъ*, а число, получающееся отъ умноженія, называется *произведеніемъ*.

Упражненія:

Множимое равно 15, произведеніе 60, какой былъ множитель? (4.)

Множитель 8, произведеніе 96, какъ велико множимое? (12.)

Множитель 3, множимое 26, какъ велико произведеніе? (78.)

Число 88 есть произведеніе какихъ двухъ чиселъ?

Число 96 есть произведеніе какихъ двухъ чиселъ?

Найти произведеніе чиселъ 17 и 5. Какое число здѣсь множимое и какое множитель?

Приведите задачу, которая рѣшалась бы умноженіемъ.

„Мальчикъ купилъ 5 грушъ, заплативши за каждую 6 коп. Сколько заплатилъ онъ за всѣ груши?“

„Въ вечеръ сгорѣло 6 фунтовъ керосину. Сколько стоило освѣщеніе въ этотъ вечеръ, если фунтъ керосину стоитъ 11 коп.?“

„Въ училищѣ 4 класса, и въ каждомъ классѣ по 25 учениковъ. Сколько учениковъ въ этомъ училищѣ?“

„Въ первомъ классѣ 18 учениковъ, а во всемъ училищѣ въ 5 разъ болѣе. Сколько учениковъ въ училищѣ?“

Составьте произведенiе для двухъ чиселъ: 15 и 6. (90.)

Какое число вы берете множимымъ и какое множителемъ? (15 множимое и 6 множитель.)

А можно ли взять 6 множимымъ, а 15 множителемъ? (Все равно.)

Приведите задачу, въ которой 15 было бы множимымъ, а 6 множителемъ.

„Куплено 6 аршинъ полотна по 15 коп. за аршинъ. Сколько стоитъ все полотно?"

Почему же тутъ будетъ множителемъ 6, а не 15?

Потому что 15 коп. нужно повторить 6 разъ, увеличить въ 6 разъ, чтобы получить цѣну полотна, а множитель есть то число, на которое множатъ.

Приведите теперь задачу, гдѣ бы 6 было множимымъ, а 15 множителемъ.

„Проѣзжая въ часъ по 6 верстъ, путешественникъ доѣхалъ отъ одного города до другаго въ 15 часовъ. Какъ велико разстоянiе между этими городами?"

Здѣсь надо 6 верстъ взять 15 разъ, а потому 15 будетъ множителемъ.

Мѣняется ли величина произведенiя отъ перемѣны множимаго на множителя и обратно? (Нѣтъ, не мѣняется.) Что же мѣняется при этой перестановкѣ? (Наименованiе произведенiя.)

А если числа не имѣютъ наименованiя, какъ напримѣръ 14 и 7, и нужно составить ихъ произведенiе, то какое изъ нихъ взять множителемъ? (Все равно: произведенiе будетъ одно и то же, возьмемъ ли 7 множителемъ, а 14 множимымъ, или наоборотъ.)

Замѣтьте, что часто множимое и множителя называютъ просто *множителями* того произведенiя, которое изъ нихъ составлено, такъ какъ каждое можетъ быть взято множителемъ и отъ этого произведенiе не измѣняется.

Составьте произведенiе 66 изъ двухъ множителей. Разложите число 68 на два множителя.

Придумайте числа, которыя состоятъ изъ двухъ равныхъ множителей ($4 = 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$ и проч.) Затѣмъ идутъ упражненiя учениковъ въ составленiи задачъ на два дѣйствiя (напр. сложенiе и умноженiе, или вычитанiе и умноженiе), а также и на всѣ три дѣйствiя.

Хотя при изученiи чиселъ первой сотни ученики посредствомъ частыхъ упражненiй хорошо усвоиваютъ таблицу умноженiя, но при повторенiи курса слѣдуетъ дать имъ эту таблицу въ извѣстной системѣ и потребовать заучить ее наизустъ такъ, чтобы ученики могли, вовсе не думая,

быстро отвѣчать на вопросы учителя изъ этой таблицы. Такое заучиванье нисколько не должно казаться вреднымъ, такъ какъ сущность этой таблицы дѣти знаютъ хорошо.

Дѣленіе.

Предлагается ученикамъ прочесть выраженіе:

$$72 : 8 = 9$$

8 содержится въ 72 девять разъ; 8-я часть 72 есть 9; 8 меньше 72 въ 9 разъ; число въ 8 разъ меньшее 72 есть 9.

Напишите: 15 содержится въ 60 четыре раза (60 : 15 = 4); 9-ая часть 63 есть 7 (63 : 9 = 7); 84 больше 12 въ 7 разъ (84 : 12=7); число въ 5 разъ меньшее 80 есть 16 (80 : 5=16).

Какъ записать, что если 96 орѣховъ раздать 8-ми мальчикамъ поровну, то каждый получитъ по 12? (96 : 8=12.)

Если взять 15-ую часть 75, то получится 5? (75 : 15=5.)

Что число 84 больше 14 въ 6 разъ? (84 : 14=6.)

Почему вы вездѣ поставили одинъ и тотъ же знакъ (:)?

Потому что во всѣхъ этихъ случаяхъ вычисленіе одно и то же.

Замѣтьте, что дѣйствіе, посредствомъ котораго производится вычисленіе въ этихъ случаяхъ, называется *дѣленіемъ.*

Итакъ, скажите, въ какихъ случаяхъ приходится одно число дѣлить на другое?

Когда требуется узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, или во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другаго; когда требуется число раздѣлить на равныя части; когда нужно число уменьшить въ нѣсколько разъ.

Какое же дѣйствіе называется дѣленіемъ?

Дѣленіемъ называется дѣйствіе, посредствомъ котораго узнается, во сколько разъ одно число болѣе или менѣе другаго, или число уменьшается въ нѣсколько разъ.

Число, которое дѣлится, называется *дѣлимымъ;* число, на которое дѣлится дѣлимое, называется *дѣлителемъ;* число, которое получается отъ дѣленія, называется *частнымъ.*

Упражненія:

Частное 6, дѣлимое 54; какъ великъ дѣлитель? (9.)
Дѣлитель 7, частное 12; какъ велико дѣлимое? (84.)
Дѣлитель 8, дѣлимое 64; какъ велико частное? (8.)
Дѣлимое 74, дѣлитель 9; какъ велико частное? (8 съ остаткомъ 2.)

Число 7 можетъ быть частнымъ отъ дѣленія какихъ чиселъ?

Число 13 можетъ быть частнымъ отъ дѣленія какихъ чиселъ?

На какихъ дѣлителей дѣлится 78 безъ остатка?

По поводу примѣра дѣленія съ остаткомъ дѣлается заключеніе, что многія числа въ другихъ не содержатся безъ остатка и тогда частное будетъ неполное. Для большаго закрѣпленія въ сознаніи учениковъ пониманія связи между элементами дѣленія, имъ предлагаются еще примѣры:

Дѣлимое 90, остатокъ 2, дѣлитель 11; какъ велико частное? (8.)

Дѣлитель 7, частное 8, остатокъ 3; какъ велико дѣлимое?

Дѣлимое 94, остатокъ 3, частное 13; какъ великъ дѣлитель?

Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы произвести дѣленіе чиселъ.

„У одного мальчика 30 орѣховъ, а у другаго въ 5 разъ менѣе. Сколько орѣховъ у втораго мальчика?“

„Изъ 36 листовъ бумаги сшиты тетради, въ 4 листа каждая. Сколько вышло тетрадей?“

„Отецъ роздалъ 60 орѣховъ четыремъ сыновьямъ поровну. Сколько пришлось каждому?“

„Изъ 80 коп. четвертую часть мальчикъ издержалъ на покупку книги. Сколько заплатилъ онъ за книгу?“

Затѣмъ идутъ упражненія учениковъ въ рѣшеніи теоретическихъ вопросовъ и въ составленіи задачъ на два и на три дѣйствія. Послѣднее упражненіе производится устно и письменно, такъ какъ задачи могутъ выходить очень сложныя.

Повѣрка четырехъ дѣйствій и измѣненіе результатовъ отъ измѣненія элементовъ дѣйствій.

Выводъ правилъ для повѣрки дѣйствій производится посредствомъ повѣрки задачъ, причемъ задачи берутся простыя, на одно дѣйствіе, и предлагаются учителемъ или составляются самими учениками.

Сложеніе. Придумайте задачу, для рѣшенія которой нужно было бы составить сумму изъ трехъ слагаемыхъ.

„Въ училищѣ 3 класса: въ одномъ 27 учениковъ, въ другомъ 20 и въ третьемъ 34. Сколько всѣхъ учениковъ въ этомъ училищѣ?“

Учитель выписываетъ данныя числа на классную доску такъ:

$$\begin{array}{r}27\\+20\\34\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}20\\+27\\34\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}34\\+27\\20\\\hline\end{array}$$

и спрашиваетъ, въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ складывать эти числа и измѣнится ли отъ этого сумма. Если бы ученики затруднились

отвѣчать на этотъ вопросъ, что почти немыслимо послѣ пройденнаго ими курса, то составляется сумма при всѣхъ трехъ расположеніяхъ слагаемыхъ, и ученики убѣждаются въ томъ, что величина суммы не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ (81).

Какъ я долженъ измѣнить слагаемыя, чтобы получить сумму 6-ю единицами большую?

Нужно или къ одному изъ слагаемыхъ прибавить 6, или ко всѣмъ тремъ по 2, или къ одному 4, къ другому 2 и т. д.

Что сдѣлается съ суммою, когда я къ одному изъ слагаемыхъ прибавлю 8, а отъ другаго отниму 8?

Что сдѣлается съ суммою, когда я отъ одного изъ слагаемыхъ отниму 9?

Скажите теперь, какъ надо измѣнять слагаемыя, чтобы сумма увеличивалась, и какъ, чтобы сумма уменьшалась?

Если даны 2 слагаемыя и сумма трехъ слагаемыхъ, какъ найти третье слагаемое? Надо сложить данныя 2 слагаемыя и сумму эту вычесть изъ всей суммы, тогда получится третье слагаемое.

Сложите четыре числа: 18, 29, 26 и 15 (сумма = 88). Какъ провѣрить, что полученная сумма вѣрна, что при сложеніи не сдѣлано ошибки?

Ученики предлагаютъ различные способы провѣрки: а) сложить числа въ другомъ порядкѣ, б) сложить первыя два слагаемыя вмѣстѣ и послѣднія два вмѣстѣ и одну изъ этихъ суммъ вычесть изъ всей суммы, тогда должна получиться въ остаткѣ другая сумма, в) сложить три слагаемыхъ и сумму ихъ вычесть изъ всей суммы, въ остаткѣ должно получиться четвертое слагаемое и проч. Изъ этихъ способовъ учитель останавливается на одномъ, именно послѣднемъ, закрѣпляетъ его въ памяти учениковъ примѣрами и задачами.

Вычитаніе. Рѣшите задачу: „Въ кадкѣ было 83 фунта масла, и въ теченіи мѣсяца израсходовано 56 фунтовъ. Сколько масла осталось въ кадкѣ?“ (83 — 56 = 27). Составьте свою задачу съ этими же числами, но такъ, чтобы, рѣшивъ ее, мы повѣрили эту задачу. „Въ кадкѣ было 83 фунта масла, а по истеченіи мѣсяца осталось только 27. Сколько масла израсходовано въ этотъ мѣсяцъ?“ (83—27=56.)

„Въ теченіи мѣсяца изъ кадки израсходовано 56 фунтовъ масла, и осталось еще въ кадкѣ 27 фунтовъ. Сколько было всего масла въ кадкѣ?“. (56 + 27 = 83.)

Скажите теперь, какъ повѣряется вычитаніе?—Нужно сложить разность съ вычитаемымъ, тогда получится уменьшаемое, или отъ уменьшаемаго отнять разность, должно получиться вычитаемое.

Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы изъ 65 вычесть 37.

„Хозяйка, имѣя 65 коп., издержала па покупку говядины 37 коп., а на остальныя деньги купила зелени. На сколько она купила зелени?“ (65 — 37 = 28).

Что надо сдѣлать съ уменьшаемымъ или вычитаемымъ, или съ обоими разомъ, чтобы разность получилась на 7 единицъ болѣе? Нужно прибавить 7 къ уменьшаемому, или отнять 7 отъ вычитаемаго, или прибавить 4 къ уменьшаемому и отнять 3 отъ вычитаемаго, и т. д.

Что надо сдѣлать съ уменьшаемымъ или вычитаемымъ, или съ обоими разомъ, чтобы разность получилась на 8 единицъ менѣе? Нужно прибавить 8 къ вычитаемому, или отнять 8 отъ уменьшаемаго, или прибавить 5 къ вычитаемому и отнять 3 отъ уменьшаемаго, и т. д.

Какъ можно измѣнять уменьшаемое и вычитаемое, не измѣняя разности? Можно къ уменьшаемому и къ вычитаемому придать поровну, или отнять отъ нихъ поровну.

Скажите теперь, когда разность увеличивается, когда уменьшается и когда остается безъ перемѣны?

Умноженіе. Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы 6 помножить на 4.

„Сколько слѣдуетъ заплатить за 4 яблока, если каждое стоитъ 6 копеекъ?“ (6 × 4 = 24).

Сколько бы стоили яблоки, если бы цѣна каждаго была вдвое болѣе? (12 × 4 = 48).

Во сколько разъ пришлось бы заплатить болѣе, если бы при прежней цѣнѣ было куплено яблокъ втрое болѣе? (6 × 12 = 72).

Во сколько разъ цѣна яблока должна быть менѣе 6 коп., чтобы за всѣ яблоки пришлось заплатить втрое менѣе? (2 × 4 = 8).

Какъ можно измѣнять цѣну яблокъ и число ихъ, не измѣняя всей платы за яблоки? (3×8=24, 2×12=24, 12×2=24, 1×24=24 и т. д.).

Скажите, отъ какого измѣненія множителей произведеніе увеличивается въ нѣсколько разъ, отъ какого уменьшается въ нѣсколько разъ и отъ какого не измѣняется. Рѣшите задачу: „Крестьянинъ отъ деревни до города дошелъ въ 8 часовъ, проходя въ часъ по 4 версты. Какъ велико разстояніе отъ деревни до города?“ (32).

Составьте по тѣмъ же условіямъ и числамъ свою задачу для повѣрки этой.

„Отъ деревни до города 32 версты; крестьянинъ прошелъ это разстояніе въ 8 часовъ. По скольку верстъ шелъ онъ въ часъ?“ (4).

„Во сколько часовъ крестьянинъ дошелъ отъ деревни до города, находящихся на разстояніи 32 верстъ, если въ часъ онъ проходилъ по 4 версты?“ (8.)

Слѣдовательно, какимъ образомъ провѣряется произведеніе, когда умноженіе сдѣлано?

Нужно произведеніе раздѣлить на множителя, тогда получится множимое, или раздѣлить его на множимое, тогда получится множитель.

Дѣленіе. Составьте задачу, для рѣшенія которой пришлось бы 24 раздѣлить на 6.

„24 коп. роздано поровну 6-ти бѣднымъ. По скольку копеекъ получилъ каждый?“ (4.)

По скольку копеекъ получилъ бы каждый, если бы денегъ было роздано втрое болѣе? (12.)

Если бы бѣдныхъ было вдвое болѣе, а число денегъ то же? (2.)

Если бы бѣдныхъ было втрое менѣе, а денегъ вчетверо болѣе? (48.)

Если бы бѣдныхъ было вчетверо болѣе и денегъ вчетверо болѣе? (4.)

Напишите частное отъ дѣленія 36 на 6 и измѣняйте дѣлимое и дѣлителя такъ, чтобы частное не измѣнилось.

$$36 : 6 = 6$$
$$18 : 3 = 6$$
$$12 : 2 = 6$$
$$6 : 1 = 6$$
$$72 : 12 = 6$$

и т. д.

Напишите частное отъ дѣленія 36 на 6 и измѣняйте дѣлимое или дѣлителя или обоихъ разомъ, чтобы частное уменьшилось въ 3 раза.

$$36 : 6 = 6$$
$$12 : 6 = 2$$
$$36 : 18 = 2$$
$$72 : 36 = 2$$

и т. д.

Измѣняйте дѣлимое или дѣлителя или обоихъ разомъ, чтобы частное увеличилось въ два раза.

$$36 : 6 = 6$$
$$72 : 6 = 12$$
$$36 : 3 = 12$$
$$12 : 1 = 12$$

и т. д.

Итакъ, скажите, когда частное уменьшается, когда увеличивается и когда не измѣняется.

Рѣшите задачу: „Изъ 64 аршинъ сукна сшито солдатамъ столько шинелей, сколько ихъ могло выйти, и на каждую шинель употреблено по 5 аршинъ, а изъ всего остальнаго сукна сдѣланы жилеты. Сколько аршинъ пошло на жилеты?“ (4 аршина.)

Назовите тутъ дѣлимое, дѣлителя, частное и остатокъ. Дѣлимое 64, дѣлитель 5, частное 12 и остатокъ 4.

Составьте свою задачу для повѣрки этой съ тѣми же числами и условіями.

Изъ куска сукна сдѣлано 12 шинелей, по 5 аршинъ на каждую, а изъ остальныхъ 4-хъ аршинъ—жилеты. Сколько было аршинъ въ кускѣ? $(12\times5+4=64.)$

Отъ куска сукна въ 64 аршина отрѣзано 4 аршина на жилеты, а изъ остальнаго сукна сдѣлано 12 шинелей и на каждую шинель употреблено сукна поровну. Сколько аршинъ сукна пошло на каждую шинель? $[(64-4) : 12=5.]$

Отъ куска сукна въ 64 аршина отрѣзано 4 аршина на жилеты, а изъ остальнаго сдѣланы шинели, по 5 аршинъ на каждую. Сколько вышло шинелей? $[(64-4) : 5=12.]$

Слѣдовательно, какимъ образомъ повѣрить дѣленіе?

Нужно дѣлителя умножить на частное и прибавить къ произведенію остатокъ, тогда получится дѣлимое; или отъ дѣлимаго отнять остатокъ и разность раздѣлить на частное, тогда получится дѣлитель; или наконецъ отъ дѣлимаго отнять остатокъ и полученную разность раздѣлить на дѣлителя, тогда получится частное.

А какъ поступить при повѣркѣ въ томъ случаѣ, когда остатка не получается?

Нужно дѣлимое раздѣлить на частное, тогда получится дѣлитель, или дѣлителя умножить на частное, тогда получится дѣлимое. Затѣмъ, идетъ упражненіе учениковъ въ составленіи своихъ задачъ на указанное дѣйствіе и въ составленіи задачъ повѣрочныхъ.

Повтореніе пройденнаго о дѣйствіяхъ на рѣшеніи задачъ.

Нѣтъ надобности при изученіи чиселъ отъ 1 до 100 перерѣшить съ учениками изъ „Сборника“ всѣ задачи, относящіяся къ этому курсу. Задачи, нерѣшенныя во время прохожденія курса, отмѣчаются учителемъ въ „Сборникѣ“ и даются ученикамъ при повтореніи курса.

Для повторенія понятія о дѣйствіяхъ посредствомъ задачъ подбираются задачи сложныя, требующія для своего рѣшенія не менѣе двухъ

дѣйствій, но не замысловатыя, чтобы ученики не затруднялись въ опредѣленіи связи и отношенія между собою данныхъ чиселъ, такъ какъ здѣсь имѣется въ виду обратить ихъ вниманіе преимущественно на эти отношенія.

Упражненіе производится посредствомъ разбора задачи относительно совокупности дѣйствій, которыя необходимо совершить для ея рѣшенія. Разборъ производится по двумъ пріемамъ. Для ясности привожу самый образецъ этихъ упражненій.

Учитель читаетъ изъ „Сборника" задачу № 566:

„Крестьянинъ посѣялъ на каждой изъ 5 десятинъ земли по 3 четверти овса и получилъ урожай самъ-шестъ; 50 четвертей изъ всего собраннаго овса онъ оставилъ для себя, а весь остальной овесъ продалъ и за каждыя 4 четверти получилъ 9 руб. Сколько денегъ получилъ крестьянинъ за весь проданный овесъ?"

Первый пріемъ разбора.

Скажите планъ рѣшенія задачи.

Прежде надо узнать, сколько четвертей овса крестьянинъ посѣялъ, потомъ сколько собралъ, потомъ сколько четвертей овса онъ продалъ, потомъ сколько разъ продалъ онъ овса по 4 четверти и, наконецъ, сколько получилъ за проданный овесъ.

Обращаясь затѣмъ къ отдѣльнымъ ученикамъ съ вопросами: „что прежде надо узнать, что потомъ? и т. д., учитель, по мѣрѣ того, какъ ученики даютъ отвѣты, выписываетъ на доскѣ табличку всѣхъ неизвѣстныхъ въ задачѣ подъ нумерами:

1) Сколько четвертей овса посѣялъ крестьянинъ.
2) „ „ собралъ.
3) „ „ продалъ.
4) „ разъ продалъ по 4 четверти.
5) „ получилъ за проданный овесъ.

Итакъ, сколько дѣйствій необходимо сдѣлать для рѣшенія задачи? Пять дѣйствій.

Какое первое дѣйствіе? Умноженіе; надо умножить 3 на 5.

Для чего вы умножаете 3 на 5? Для того, чтобы узнать, сколько четвертей овса крестьянинъ посѣялъ.

Почему вы думаете, что здѣсь необходимо именно умноженіе, а не другое дѣйствіе? На каждой десятинѣ крестьянинъ засѣялъ 3 четверти овса, то на 5 десятинахъ онъ засѣялъ въ 5 разъ болѣе, а чтобы 3 увеличить въ 5 разъ, нужно 3 умножить на 5.

Учитель при первой неизвѣстной приписываетъ въ скобкахъ и самое вычисленіе такъ:

1) Сколько четвертей овса посѣялъ крестьянинъ. ($3 \times 5 = 15$.)

Какое второе дѣйствіе? (Разговоръ подобный предъидущему.) Записывается ($15 \times 6 = 90$.)

Какое третье дѣйствіе? Вычитаніе; нужно изъ 90 вычесть 50.

Для чего вы дѣлаете вычитаніе? Для опредѣленія, сколько четвертей овса крестьянинъ продалъ.

Почему здѣсь необходимо вычитаніе? Зная, что было собрано 90 четвертей овса, и зная, что крестьянинъ оставилъ для себя 50 четвертей, мы узнаемъ, сколько четвертей продано, а для этого необходимо отъ числа четвертей собраннаго овса отнять число четвертей, оставленныхъ крестьяниномъ, то-есть узнать остатокъ, который проданъ. ($90 - 50 = 40$.)

Какое четвертое дѣйствіе? Дѣленіе; нужно 40 раздѣлить на 4.

Для чего вы 40 дѣлите на 4? Для опредѣленія того, сколько разъ продано по 4 четверти.

Почему здѣсь необходимо дѣленіе? Всего продано 40 четвертей, а каждый разъ по 4 четверти, значитъ по 4 четверти продано столько разъ, сколько разъ 4 содержится въ 40, а чтобы узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, надо сдѣлать дѣленіе ($40 : 4 = 10$).

Какое пятое дѣйствіе? и т. д.

Задача. (Изъ Сборника № 584). Крестьянинъ отправился изъ своей деревни въ городъ по желѣзной дорогѣ; каждый часъ онъ дѣлалъ по 23 версты и на этотъ переѣздъ употребилъ 4 часа. Не имѣя денегъ на обратный проѣздъ по желѣзной дорогѣ, крестьянинъ прошелъ пѣшкомъ сначала 15 верстъ, а все остальное разстояніе до деревни проѣхалъ въ телѣгѣ со своимъ знакомымъ, дѣлая по 7 верстъ въ часъ. Сколько часовъ ѣхалъ крестьянинъ въ телѣгѣ?

Второй пріемъ разбора.

Послѣ обстоятельнаго усвоенія содержанія задачи, ученики отвѣчаютъ на вопросъ: „Сколько дѣйствій необходимо сдѣлать для рѣшенія этой задачи?“

Перечислите дѣйствія въ томъ порядкѣ, въ какомъ вы будете ихъ производить для рѣшенія задачи.

По мѣрѣ того, какъ ученики называютъ дѣйствія, учитель выписываетъ ихъ подъ нумерами на доску:

1) Умноженіе.
2) Вычитаніе.
3) Дѣленіе.

Для чего необходимо первое дѣйствіе? Для опредѣленія разстоянія деревни отъ города.

Какія числа будете вы перемножать? 23 на 4.

Почему вы думаете, что здѣсь необходимо умноженіе?—Въ часъ крестьянинъ проѣзжалъ по 23 версты, то въ 4 часа онъ проѣхалъ въ 4 раза болѣе, значитъ 23 нужно увеличить въ 4 раза, а чтобы число увеличить въ нѣсколько разъ, нужно сдѣлать умноженіе.

Противъ соотвѣтствующихъ нумеровъ учитель выписываетъ въ скобкахъ вычисленіе такъ:

1) Умноженіе. $(23 \times 4 = 92.)$

Для опредѣленія чего нужно дѣлать вычитаніе? Для опредѣленія числа верстъ, которое крестьянинъ проѣхалъ со знакомымъ въ телѣгѣ.

Съ какими числами вы будете дѣлать вычитаніе? Изъ 92 вычтемъ 15.

Почему здѣсь необходимо вычитаніе? Изъ 92 верстъ крестьянинъ 15 верстъ прошелъ пѣшкомъ, слѣдовательно, чтобы узнать, сколько верстъ онъ проѣхалъ, необходимо узнать, сколько осталось верстъ изъ 92, и для этого нужно 15 вычесть изъ 92. $(92 - 15 = 77.)$

Для чего необходимо дѣленіе? Для опредѣленія того, сколько часовъ крестьянинъ ѣхалъ въ телѣгѣ.

Съ какими числами вы будете производить это дѣйствіе?—77 будемъ дѣлить на 7.

Почему здѣсь необходимо дѣленіе, а не другое дѣйствіе?—Всего крестьянинъ проѣхалъ въ телѣгѣ 77 верстъ, а въ часъ онъ проѣзжалъ по 7 верстъ, значитъ онъ ѣхалъ столько часовъ, сколько разъ 7 содержится въ 77; а для того, чтобы узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, нужно сдѣлать дѣленіе. $(77 : 7 = 11.)$

Такимъ образомъ, ученики должны умѣть разбирать задачу по обоимъ пріемамъ, а это они могутъ сдѣлать только тогда, когда вполнѣ понимаютъ сущность каждаго изъ четырехъ дѣйствій.

Повтореніе пройденнаго о дѣйствіяхъ на вычисленіи примѣровъ.

1) Учитель выписываетъ на классной доскѣ примѣръ:

$$(28 + 65) - (17 \times 4) + (60 : 12) = ?$$

и спрашиваетъ: „Сколько дѣйствій нужно сдѣлать для вычисленія этого выраженія?“ Пять дѣйствій.

Перечислите ихъ въ порядкѣ. Сложеніе, умноженіе, вычитаніе, дѣленіе и сложеніе.

Гдѣ тутъ есть слагаемыя числа? 28 и 65.

Что мы ищемъ, складывая 28 и 65? Сумму.

Гдѣ тутъ есть уменьшаемое и вычитаемое?—Уменьшаемое (28 + 65). а вычитаемое (17 × 4).

Что мы ищемъ въ этомъ вычитаніи? Разность чиселъ.

Вы назвали еще одно сложеніе; гдѣ же тутъ слагаемыя для втораго сложенія? Одно слагаемое. которое получится отъ вычисленія первыхъ двухъ скобокъ. а другое отъ вычисленія послѣдней скобки.

Что ищется въ вычисленіи, обозначенномъ въ послѣдней скобкѣ? Частное.

Гдѣ тамъ дѣлитель? Дѣлитель 12.

Что мы узнаемъ, дѣля 60 на 12? —Узнаемъ, сколько разъ 12 содержится въ 60, или узнаемъ 12-ю часть 60, или узнаемъ, во сколько разъ 60 болѣе 12, или просто уменьшаемъ 60 въ 12 разъ.

2) Напишите выраженіе. для вычисленія котораго нужно было бы сдѣлать 3 дѣйствія. именно сначала умноженіе. потомъ дѣленіе и, наконецъ. вычитаніе.

(17 × 5)—(54 : 6) = ?
89 — (7 × 12) : 14 = ?
и проч.

3) Учитель диктуетъ примѣръ и ученики записываютъ его на доскахъ.

16 умножить на 6. отъ полученнаго числа отнять 82 безъ 49 и къ полученному числу придать 76, раздѣленное на 4.

(16 × 6)—(82—49) + (76 : 4) = ?

Работы, которыя могутъ быть даваемы учащимся для исполненія внѣ класса при прохожденіи и повтореніи курса изученія чиселъ до 100.

Принимая во вниманіе малый возрастъ учениковъ, которые изучаютъ числа первой сотни, вредъ долговременнаго сидѣнія въ классѣ и дома во время занятій. наконецъ неудобства исполненія работъ, задаваемыхъ учащимся въ сельской школѣ на домъ. слѣдуетъ сказать. что вообще задаваніе работы для исполненія учениками внѣ класса не должно имѣть мѣста. Но тѣмъ не менѣе работы эти. при хорошемъ распредѣленіи времени занятій учениковъ, весьма полезны. Исполняя работы дома, ученикъ вполнѣ самостоятельно, безъ всякой помощи. воспроизводитъ то, что проходилъ въ классѣ, или дѣлаетъ что-либо новое. что можетъ сдѣлать на основаніи всего запаса развитія и знаній, пріобрѣтенныхъ за предшествовавшее время обученія. Кромѣ того,

такія работы значительно ускоряютъ и прохожденіе самаго курса: чѣмъ больше ученикъ вычисляетъ, тѣмъ быстрѣе онъ подвигается впередъ, а во время урока не всегда бываетъ возможно дать значительное развитіе упражненіямъ учениковъ въ вычисленіяхъ.

Работы, которыя можно, при удобныхъ обстоятельствахъ, предлагать ученикамъ при прохожденіи и повтореніи этого курса, вытекаютъ изъ всѣхъ приведенныхъ мною въ подробности упражненій, такъ что мнѣ остается только ихъ перечислить.

1) *Вычисленіе примѣровъ.*

Требованіе:

а) Вычислить: (82 — 69) + (36 + 17) — (78 : 13).

Исполненіе: 82 — 69 = 13
36 + 17 = 53
13 + 53 = 66
78 : 13 = 6
66 — 6 = 60

б) Или учащіеся вычисляютъ строки, данныя изъ Сборника, и противъ каждой строки пишутъ сразу, послѣ знака равенства, полученное отъ вычисленія число.

2) *Разложеніе чиселъ на слагаемыя и множители.*

Требованіе при прохожденіи курса:

а) Какъ можно раздать 73 орѣха тремъ мальчикамъ?

Исполненіе: 73 = 15 + 17 + 41
73 = 26 + 34 + 13
73 = 15 + 15 + 43
73 = 28 + 28 + 17
и т. д.

б) Сколькимъ бѣднымъ можно раздать поровну 84 коп. и по скольку копеекъ получитъ каждый?

Исполненіе:

84 = 1 × 84	84 = 84 × 1
84 = 2 × 42	84 = 42 × 2
84 = 3 × 28	84 = 28 × 3
84 = 4 × 21	84 = 21 × 4
84 = 6 × 14	84 = 14 × 6
84 = 7 × 12	84 = 12 × 7

Требованіе при повтореніи курса, когда дѣйствія выдѣлены:

а) Разложить 93 на 4 слагаемыя.

Исполненіе: 93 = 17 + 26 + 32 + 18
93 = 19 + 23 + 24 + 27
93 = 17 × 2 + 25 + 34
93 = 18 × 3 + 39
и т. д.

б) Разложить 96 на 2 множителя.

Исполненіе:

96 = 1 × 96	96 = 96 × 1
96 = 2 × 48	96 = 48 × 2
96 = 3 × 32	96 = 32 × 3
96 = 4 × 24	96 = 24 × 4
96 = 6 × 16	96 = 16 × 6
96 = 8 × 12	96 = 12 × 8

в) Выписать всѣ числа, содержащіяся въ 72 безъ остатка.

Исполненіе:

72 : 1 = 72	72 : 72 = 1
72 : 2 = 36	72 : 36 = 2
72 : 3 = 24	72 : 24 = 3
72 : 4 = 18	72 : 18 = 4
72 : 6 = 12	72 : 12 = 6
72 : 8 = 9	72 : 9 = 8

г) Раздѣлить 78 на равныя части.

Исполненіе:

78 : 2 = 39	78 : 78 = 1
78 : 3 = 26	78 : 39 = 2
78 : 6 = 13	78 : 26 = 3
	78 : 13 = 6

д) Выписать числа, дѣлящіяся на 5 равныхъ частей.

Исполненіе: 5 : 5 = 1
10 : 5 = 2
15 : 5 = 3
20 : 5 = 4 и т. д.

3) *Рѣшеніе задачъ.*

Требованіе: рѣшить задачу № 531. (Изъ „Сборника“).

Исполненіе: 41 × 2 = 82
8 × 3 = 24
9 × 4 = 36

$$24 + 36 = 60$$
$$82 - 60 = 22$$
$$22 : 2 = 11$$

Или:

Орѣховъ было	$41 \times 2 = 82$
3 сына получили	$8 \times 3 = 24$
4 „ „ . . .	$9 \times 4 = 36$
7 сыновей „ . . .	$24 + 36 = 60$
Орѣховъ осталось	$82 - 60 = 22$
Каждая дочь получила. . .	$22 : 2 = 11$

4) *Составленіе задачъ и формулъ.*

Требованіе:

а) Составить и рѣшить задачу, для рѣшенія которой потребовались бы три дѣйствія.

Исполненіе. Мальчикъ, имѣя 43 коп., купилъ 5 карандашей, по 5 коп. каждый, а на остальныя—грифелей, по 3 коп. каждый. Сколько грифелей купилъ онъ?

$$5 \times 5 = 25$$
$$43 - 25 = 18$$
$$18 : 3 = 6$$

Требованіе.

б) Составить численное выраженіе, для вычисленія котораго потребовалось бы совершить 5 дѣйствій.

Исполненіе. $(17-14) + (75-59) + (14 \times 3) + (64 : 16)$.

$$17 - 14 = 3$$
$$75 - 59 = 16$$
$$14 \times 3 = 42$$
$$64 : 16 = 4$$
$$3 + 16 + 42 + 4 = 65$$

В. Составныя именованныя числа въ предѣлѣ числа отъ 1 до 100.

Изученіе чиселъ 1-й сотни заканчивается приложеніемъ всего усвоеннаго учениками къ вычисленіямъ съ составными именованными числами. Слѣдовательно, на этотъ курсъ слѣдуетъ смотрѣть, какъ на курсъ повто-

рительный, но расширяющій предшествовавшіе курсы. Имѣя основательныя понятія о дѣйствіяхъ съ числами и о значеніи этихъ дѣйствій, ученики производятъ эти дѣйствія надъ составными именованными числами, пріучаются къ аккуратности расположенія вычисленій и къ самому пріему вычисленій. Здѣсь уже нѣкоторымъ образомъ является необходимость въ письменномъ вычисленіи, а потому и необходимость установить извѣстный пріемъ вычисленія письменнаго. Пріемы, установленные для дѣйствій съ составными именованными числами, найдутъ себѣ впослѣдствіи приложеніе при дѣйствіяхъ съ числами большими, черезъ что достигается все болѣе и болѣе основательное знакомство учениковъ какъ съ числами, такъ и съ дѣйствіями.

Весь этотъ курсъ ведется на рѣшеніи устныхъ и письменныхъ задачъ. Устныя задачи служатъ для ознакомленія учениковъ съ мѣрами и единичными ихъ отношеніями, письменныя—для выводовъ относительно механизма четырехъ дѣйствій.

Чтобы не затруднять учениковъ въ запоминаніи различныхъ единицъ различныхъ мѣръ, лучше изучать мѣры по группамъ—по одной группѣ въ теченіи нѣсколькихъ уроковъ, такъ: сначала мѣры сыпучихъ тѣлъ, потомъ мѣры длины, мѣры вѣса. А въ концѣ предлагать задачи, относящіяся къ различнымъ мѣрамъ. Съ этою цѣлью и въ „Сборникѣ“ задачи расположены въ трехъ отдѣлахъ. (См. А. Курсъ приготовительный, 2) Задачи на состав. именов. числа.)

Хотя уже и при рѣшеніи задачъ въ предшествовавшихъ курсахъ ученики часто встрѣчались съ различными единицами мѣръ, причемъ имъ показывались и самыя мѣры, но, приступая въ этомъ курсѣ къ рѣшенію задачъ на именованныя числа, относящіяся къ какой-либо группѣ мѣръ, слѣдуетъ изучить съ учениками эту группу въ системѣ и наглядно и потомъ уже переходить къ рѣшенію задачъ.

Такимъ образомъ, приступая, напримѣръ, къ рѣшенію задачъ на мѣры длины, ученики подъ руководствомъ учителя измѣряютъ дворъ, корридоръ, классъ. При измѣреніи они убѣждаются въ необходимости различныхъ мѣръ и ихъ подраздѣленій. Измѣряя, положимъ, корридоръ саженью, они видятъ, что сажень по длинѣ корридора укладывается, напримѣръ, 8 разъ и еще остается длина меньшая сажени; ее можно измѣрить частью сажени—аршиномъ или футомъ. Аршинъ составляетъ треть сажени, два аршина—двѣ трети, 3 аршина—три трети или цѣлую сажень. Такъ усвоиваются наглядно отношенія между различными единицами одной мѣры. Во время самаго измѣренія ученикамъ предлагаются соотвѣтствующіе вопросы:

„Сколько аршинъ въ сажени?“

„Сколько футовъ въ сажени?“

„Сколько вершковъ въ аршинѣ, сажени?“

„Сколько дюймовъ въ футѣ, аршинѣ, сажени?“

„Какую часть сажени составляютъ: 1 арш., 2, 3 аршина, 1, 2, 3 и т. д. фута?“

„Какую часть аршина составляютъ: 1, 2, 4, 8 вершковъ, 1, 4, 7, 14 дюймовъ?“

„Сколько вершковъ въ половинѣ, четверти, восьмой части аршина?“

„Сколько дюймовъ въ половинѣ, четверти аршина?“

„Сколько вершковъ, дюймовъ въ половинѣ, трети, четверти и т. д. сажени?“

Въ классѣ ученики составляютъ таблицу мѣръ длины, или прямо пользуются тою таблицею, которая приложена въ концѣ 1-й части „Сборника“.

Познакомившись наглядно съ единицами мѣры извѣстной группы, ученики рѣшаютъ устныя задачи, на которыхъ еще обстоятельнѣе усвоиваютъ взаимныя отношенія этихъ единицъ и знакомятся съ раздробленіемъ и превращеніемъ составныхъ именованныхъ чиселъ.

Задача. (Изъ Сборника № 664). Для перехода черезъ дворъ, длиною въ 8 саж. 2 арш., положили 4 доски, каждая длиною въ 1 саж. 1 арш. На какомъ разстояніи нужно положить еще доски?

Скажите планъ рѣшенія. Надо сперва узнать, какъ велико разстояніе, занятое 4-мя досками, а потомъ уже на какомъ разстояніи еще нужно положить доски.

Скажите, какъ велико разстояніе, занятое 4-мя досками? 4 саж. и 4 арш. или 5 саженъ 1 арш., потому что въ 1 сажени 3 арш.

На какомъ разстояніи нужно еще положить доски? На разстояніи 3 саж. 1 арш., потому что 8 саж. безъ 5 саж. составляютъ 3 саж., а 2 арш. безъ одного аршина составляетъ 1 аршинъ.

Задача. (Изъ Сборника № 678). Мальчикъ измѣрилъ длину аллеи палкой. Сколько разъ уложилъ онъ эту палку, если длина аллеи была 12 саж. 6 фут., а длина палки — 1 саж. 2 фута?

Какъ узнать, сколько разъ мальчикъ уложилъ палку? Надо узнать, сколько разъ по 1 саж. 2 фута содержится въ 12 саж. 6 фут., а для этого нужно 12 саж. 6 фут. и 1 саж. 2 фута раздробить въ футы. 12 саж. = 84 фут., а 84 фута да 6 фут. составляютъ 90 фут.; 1 саж. = 7 фут., а 7 фут. да 2 фута составляетъ 9 фут.; 9 фут. содержится въ 90 фут. 10 разъ; слѣдовательно, мальчикъ уложилъ свою палку по длинѣ аллеи 10 разъ.

Изъ рѣшенія письменныхъ задачъ ученики дѣлаютъ выводы слѣдующаго рода: а) для совершенія какого-либо дѣйствія съ данными числами

нужно написать ихъ въ извѣстномъ порядкѣ, напримѣръ, при сложеніи написать слагаемыя такъ, чтобы числа одного наименованія находились въ одномъ ряду; б) сложеніе, вычитаніе и умноженіе слѣдуетъ начинать съ чиселъ самаго меньшаго наименованія, а дѣленіе—съ чиселъ высшаго наименованія; в) сумму, полученную отъ сложенія чиселъ одного наименованія, и произведеніе, полученное отъ умноженія числа какого-либо наименованія на множителя, слѣдуетъ упрощать, если въ нихъ заключаются единицы высшаго наименованія выключая эти единицы (превращая); г) при дѣленіи именованныхъ чиселъ на именованныя нужно дѣлимое и дѣлителя приводить къ одному наименованію; д) отъ сложенія, вычитанія и умноженія именованныхъ чиселъ, по самому значенію этихъ дѣйствій, получается то же наименованіе, какое имѣли слагаемыя, уменьшаемое и вычитаемое, множимое; е) множитель есть всегда число отвлеченное, по смыслу дѣйствія; ж) при дѣленіи одного на другое чиселъ одного наименованія узнается содержаніе одного числа въ другомъ, и потому частное получается число отвлеченное, а при дѣленіи именованнаго числа на отвлеченное дѣлимое дѣлится на равныя части, или уменьшается въ нѣсколько разъ, а потому частное будетъ число именованное и одного наименованія съ дѣлимымъ.

Всѣ эти главнѣйшіе выводы и другіе болѣе частные дѣлаются не вдругъ, а исподоволь, такъ, что одна, двѣ, а иногда и три задачи даютъ поводъ для составленія только одного вывода, и только послѣ рѣшенія нѣсколькихъ задачъ изъ отдѣла можно приводить эти выводы въ стройный порядокъ и предлагать ученикамъ для установленія этого порядка общіе отвлеченные вопросы.

Образцы работъ.

Задача. (Изъ Сборника № 702). Партія каменьщиковъ взялась вымостить улицу, длиною въ 72 саж. 2 фута, въ 6 недѣль; въ первую недѣлю каменьщики вымостили 8 саж. 5 фут., во вторую 10 саж. 3 фута, а въ каждую изъ слѣдующихъ 3 недѣль мостили по 12 саж. 6 фут. Сколько осталось вымостить въ послѣднюю недѣлю?

Скажите планъ рѣшенія.

Надо узнать, сколько каменьщики вымостили въ первыя 5 недѣль, а потомъ уже сколько осталось имъ вымостить въ послѣднюю недѣлю; а для опредѣленія длины улицы, вымощенной въ первыя пять недѣль, нужно еще прежде узнать, сколько они вымостили въ три недѣли послѣ первыхъ двухъ.

Сколько дѣйствій и какія именно придется совершить для рѣшенія этой задачи?

Три дѣйствія: умноженіе, сложеніе и вычитаніе.

Для опредѣленія чего и какія числа вы будете множить?

Нужно умножить 12 саж. 6 фут. на 3 для опредѣленія длины улицы, вымощенной въ 3 недѣли.

Учитель показываетъ ученикамъ на доскахъ, какъ пишется множимое и множитель при умноженіи чиселъ, и по ихъ указаніямъ производитъ самъ умноженіе.

12 саж. 6 фут.
× 3

Наводящими вопросами ученикъ доходитъ до вывода, что умноженіе слѣдуетъ начать съ футовъ, потому что если бы начать съ саженъ, то послѣ пришлось бы произведеніе 36 исправлять, такъ какъ отъ умноженія 6 фут. на 3 получается 18 футовъ, изъ которыхъ должно выключить 2 сажени и придать къ 36 саж. Такимъ образомъ, умножая 6 фут. на 3, ученики получаютъ 18 фут., изъ которыхъ выдѣляютъ 2 саж. и отмѣчаютъ ихъ на сторонѣ, а оставшіеся 4 фута подписываютъ въ произведеніи подъ футами; потомъ умножаютъ 12 саж. на 3, получаютъ 36 саж. и къ нимъ придаютъ 2 саж.; окончательно получается 38 саж. 4 фута. Какое нужно совершить слѣдующее дѣйствіе и для опредѣленія чего?

Сложеніе,—для опредѣленія длины улицы, вымощенной въ 5 недѣль.

Какія тутъ слагаемыя числа?

8 саж. 5 фут., 10 саж. 3 фута и 38 саж. 4 фута.

Учитель пишетъ на доскѣ:

8 саж. 5 фут.
+10 „ 3 фута
38 „ 4 „

Съ чиселъ какого наименованія слѣдуетъ начать сложеніе и почему?

Нужно начать съ футовъ, потому что можетъ получиться такая сумма, изъ которой придется выдѣлить сажени и придать къ суммѣ, которая получится отъ сложенія саженъ.

Сдѣлайте сложеніе.

Отъ сложенія футовъ ученики получаютъ 12 фут., изъ которыхъ выключаютъ 1 саж., а остальные 5 футовъ подписываютъ подъ футами, полученную 1 саж. придаютъ къ саженямъ и получаютъ въ суммѣ 57 саж. Итакъ, отъ сложенія получается 57 саж. 5 фут.

Какое слѣдуетъ дѣйствіе и для опредѣленія чего?

Слѣдуетъ вычитаніе, чтобы узнать, сколько осталось каменьщикамъ вымостить въ послѣднюю недѣлю.

Какое число будетъ уменьшаемымъ и какое вычитаемымъ?

Уменьшаемое 72 саж. 2 фута, а вычитаемое 57 саж. 5 фут.

Учитель пишетъ:

— 72 саж.	2 фута
57 „	5 фут.

Съ какого наименованія начнете вы вычитать и почему?

Нужно начать съ футовъ, потому что для вычитанія 5 фут. нужно будетъ взять отъ 72 саж. одну сажень и раздробить ее въ футы, а если начать вычитаніе съ саженъ, то придется полученную разность исправлять, занимая отъ нея одну сажень.

Вычитайте.

Отъ 72 саж. возьмемъ 1 саж. и раздробимъ въ футы, получается 7 фут.; 7 фут. и 2 фута составляютъ 9 фут., а 9 фут. безъ 5 фут. даетъ 4 фута; затѣмъ, отъ 71 саж. отнимемъ 57 саж., получаемъ въ остаткѣ 14 саж. Итакъ, отъ вычитанія получается 14 саж. 4 фута.

Послѣ этого подбираются задачи, требующія для своего рѣшенія совершенія разсмотрѣнныхъ дѣйствій, и даются для разрѣшенія ученикамъ въ классѣ и внѣ класса.

Задача. (Изъ Сборника № 750). Къ мастеру принесли старый серебряный кофейникъ, вѣсомъ въ 1 фун. 29 лот. 1 зол., и изъ всего этого серебра велѣли сдѣлать 8 подстаканниковъ, вѣсомъ каждый въ 5 лот. 2 зол., и нѣсколько чайныхъ ложекъ, вѣсомъ каждая въ 2 лота 2 зол. Сколько ложекъ сдѣлалъ мастеръ?

Скажите планъ рѣшенія.

Надо сперва узнать, сколько серебра пошло на подстаканники, потомъ сколько серебра оставалось на ложки и, наконецъ, сколько вышло ложекъ.

Назовите дѣйствія въ порядкѣ и скажите, для опредѣленія какой неизвѣстной служитъ каждое дѣйствіе.

Первое дѣйствіе—умноженіе—для опредѣленія количества серебра, которое пошло на 8 подстаканниковъ; второе дѣйствіе—вычитаніе—для опредѣленія количества серебра, изъ котораго сдѣланы ложки, и, наконецъ, дѣленіе—для опредѣленія числа сдѣланныхъ ложекъ.

Почему необходимо для опредѣленія перваго неизвѣстнаго числа дѣйствіе умноженіе?

Если на одинъ подстаканникъ употреблено серебра 5 лот. 2 зол., то на 8 подстаканниковъ его пошло въ 8 разъ болѣе, значитъ, надо 5 лот. 2 зол. увеличить въ 8 разъ, а для этого необходимо сдѣлать умноженіе.

Сдѣлайте это умноженіе на вашихъ доскахъ.

5 лот. 2 зол.
× 8

1 фун. 13 лот. 1 зол.

Узнайте теперь, сколько серебра пошло на ложки.

1 фун.	29 лот.	1 зол.
− 1 „	13 „	1 „
„	16 лот.	„

Что надо дѣлать дальше?

Дѣлить 16 лот. на 2 лота 2 зол., чтобы узнать, сколько вышло ложекъ.

Почему здѣсь необходимо сдѣлать дѣленіе?

На всѣ ложки пошло 16 лот., а на каждую по 2 лота 2 зол., слѣдовательно ложекъ вышло столько, сколько разъ 2 лота 2 зол. содержится въ 16 лот., а чтобы узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, нужно сдѣлать дѣленіе.

Нельзя ли узнать число ложекъ не посредствомъ дѣленія, а посредствомъ другаго дѣйствія?

Можно посредствомъ вычитанія, отнимая постепенно отъ 16 лотовъ по 2 лота 2 зол., и сколько разъ можно отнять по 2 лота 2 зол., столько и будетъ ложекъ.

А какъ лучше вычислять — посредствомъ дѣленія или посредствомъ вычитанія?

Посредствомъ дѣленія лучше, потому что мы сразу можемъ узнать, сколько разъ 2 лота 2 зол. содержится въ 16 лотахъ, то-есть сколько разъ по 2 лота 2 зол. можно отнять отъ 16 лот.

Сдѣлайте это дѣленіе.

16 лот. = 3 зол. × 16 = 48 зол.
2 лота 2 зол. = 3 зол. × 2 + 2 зол. = 8 зол.

48 зол. : 8 зол. = 6

Рѣшеніе задачи въ тетради ученика.

Задача. (Изъ Сборника № 746). У мѣдника было 4 пуда 10 фун. мѣди; изъ этой мѣди онъ сдѣлалъ 6 кастрюль и 8 тазовъ; на каждую кастрюлю онъ употребилъ 3 фун. 12 лот. 2 зол. мѣди, а на каждый тазъ—2 фун. 12 лот. Сколько еще мѣди осталось у мѣдника?

Вычисленіе:

3 фун. 12 лот. 2 зол.	2 фун. 12 лот.
×6	×8
18 фун. 72 лота 12 зол.	16 фун. 96 лот.
20 фун. 12 лот.	19 фун.
+ 20 фун. 12 лот.	4 пуда 10 фун.
19 фун.	— 39 фун. 12 лот.
39 фун. 12 лот.	3 пуда 10 фун. 20 лот.

Строчки:

На кастрюли пошло мѣди (3 фун. 12 лот. 2 зол.)×6=20 фун. 12 лот.
На тазы „ „ (2 фун. 12 лот.) ×8=19 фун.
На всѣ вещи „ „ (20 фун. 12 лот.)+19 фун.=39 фун. 12 лот.
Осталось мѣди(4 пуда 10 фун.)—(39 фун.12 лот.)=3 пуда 10 фун.20 лот.

Одновременно съ рѣшеніемъ задачъ, какъ только учащіеся познакомились съ письменнымъ пріемомъ совершенія какого-либо дѣйствія, они производятъ вычисленіе примѣровъ на это дѣйствіе съ составными именованными числами. Достаточное собраніе такихъ примѣровъ приведено въ Сборникѣ въ отдѣлѣ II. А) *Курсъ приготовительный*, подъ слѣдующими заглавіями: раздробленіе, превращеніе, сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, всѣ 4 дѣйствія съ составными именованными числами. Примѣры составлены на всѣ русскія мѣры и притомъ такъ, что результаты вычисленій не превышаютъ числа 100.

Такимъ образомъ, чисто практически, на рѣшеніи многихъ задачъ и вычисленіи примѣровъ, ученики доходятъ до вывода пріемовъ и правилъ относительно механизма четырехъ дѣйствій и могутъ въ концѣ курса этого года отвѣчать на общіе вопросы, каковы:

Какія дѣйствія производятся съ числами?

Какое дѣйствіе называется сложеніемъ, вычитаніемъ, умноженіемъ, дѣленіемъ?

Въ какихъ случаяхъ производится съ числами сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе?

Какія числа нужно различать при сложеніи, вычитаніи, умноженіи, дѣленіи?

Какъ складываются числа, вычитаются, множатся, дѣлятся?

Въ какомъ случаѣ частное получается число отвлеченное и въ какомъ именованное?

Какъ повѣряется сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе?

Какъ, зная сумму и одно слагаемое, найти другое слагаемое?

Какъ, зная множимое и произведеніе, найти множителя; зная множителя и произведеніе, найти множимое?

Какъ, зная дѣлителя, частное и остатокъ, найти дѣлимое; зная дѣлимое, частное и остатокъ, найти дѣлителя?

Когда сумма увеличивается?

Отчего разность можетъ уменьшаться, отчего увеличиваться; при какомъ измѣненіи уменьшаемаго и вычитаемаго разность не измѣняется?

Отъ какого измѣненія множимаго или множителя или обоихъ разомъ произведеніе увеличивается или уменьшается въ нѣсколько разъ? Отъ какого измѣненія множимаго и множителя произведеніе не измѣняется?

Отъ какого измѣненія дѣлимаго или дѣлителя или обоихъ разомъ частное увеличивается или уменьшается въ нѣсколько разъ? Отъ какого измѣненія дѣлимаго и дѣлителя частное не измѣняется?

Какъ эти, такъ и всѣ послѣдующіе выводы изъ пройденнаго курса учащіеся удерживаютъ и закрѣпляютъ въ памяти большимъ количествомъ упражненій, предшествующихъ выводу и слѣдующихъ за нимъ. Не слѣдуетъ требовать отъ учащихся, на этой ступени обученія, записыванія ариѳметическихъ выводовъ (правилъ) въ тетради, какъ этого требуютъ иногда преподаватели, предлагая учащимся въ видѣ обобщенія вопросы для письменныхъ отвѣтовъ. Записанный выводъ укладывается въ памяти ученика въ законченной формѣ, отрѣшается, такъ сказать, отъ всего ему предшествовавшаго, и учащіеся, при встрѣтившейся необходимости воспользоваться тѣмъ или другимъ выводомъ, прибѣгаютъ къ простому механическому припоминанію записаннаго. Незаписанный выводъ требуетъ отъ ученика большаго усилія памяти и соображенія: припоминаніе вывода влечетъ за собою припоминаніе того ряда упражненій и разсужденій, которыя закончились этимъ выводомъ; слѣдовательно, мысль ученика находится въ постоянномъ напряженіи.

Многіе учителя предлагаемый курсъ составныхъ именованныхъ чиселъ проходятъ одновременно съ предшествующимъ курсомъ изученія чиселъ до 100. Другіе же, особенно учителя народныхъ школъ, послѣ изученія чиселъ до 100, считаютъ учениковъ достаточно подготовленными для изученія нумераціи и четырехъ дѣйствій съ большими числами и для сокращенія времени вовсе не проходятъ составныхъ именованныхъ чиселъ въ предѣлѣ числа до 100.

ГОДЪ ТРЕТІЙ.

Курсъ этого года представляетъ третій и послѣдній концентръ курса цѣлыхъ чиселъ и состоитъ въ расширеніи предѣла числа. Всѣ основныя понятія о числѣ и пріемы дѣйствій съ числами учениками вполнѣ сознательно усвоиваются въ предшествовавшихъ двухъ курсахъ. Теперь они эти понятія и пріемы прилагаютъ къ большимъ числамъ, слѣдовательно на новомъ матеріалѣ опять повторяютъ и расширяютъ прежде пройденное. Для постепенности расширенія предѣла числа курсъ цѣлыхъ чиселъ, выходящихъ за предѣлъ 100, разбивается на два отдѣла: А) Нумерація чиселъ отъ 1 до 1000 и Б) Нумерація чиселъ до высшихъ предѣловъ и дѣйствія съ числами отвлеченными и именованными любой величины.

А) Нумерація чиселъ до 1000.

При выясненіи ученикамъ нумераціи можно пользоваться различными наглядными пособіями. Наиболѣе употребительными считаются спички, связанныя пучками въ 10 и 100 штукъ, классные счеты и ариѳметическій ящикъ. Мы будемъ пользоваться при изложеніи этого отдѣла ариѳметическимъ ящикомъ; учитель легко можетъ на основаніи пріемовъ, указанныхъ при употребленіи этого пособія, приложить ихъ при употребленіи всякаго другаго пособія.

При прохожденіи нумераціи ученикамъ должно быть выяснено: а) существованіе единицъ различныхъ разрядовъ; б) взаимное кратное отношеніе единицъ различныхъ разрядовъ; в) представленіе о величинѣ (количествѣ) числа, состоящаго изъ единицъ различныхъ разрядовъ, и г) чтеніе и написаніе числа на основаніи зависимости значенія цифры отъ мѣста, ею занимаемаго.

Приступая къ выясненію нумераціи, учитель предлагаетъ ученикамъ предварительные вопросы:

Какъ сосчитать предметы, когда ихъ много? Прибавляя постепенно по одному.

Какъ еще иначе считаютъ предметы?

Какіе предметы считаютъ парами, тройками, десятками, дюжинами, сотнями?

Какъ считать предметы десятками, сотнями? Сначала насчитываютъ по одному десятокъ и откладываютъ, потомъ еще насчитываютъ десятокъ и т. д., потомъ сосчитываютъ по 10 десятковъ, что составляетъ *сотню;* потомъ сосчитываютъ число сотенъ, и т. д.

Какъ считаютъ деньги? Какими монетами можно считать деньги по десяткамъ, сотнямъ копеекъ?

Затѣмъ ученики считаютъ отдѣльные кубики до какого-угодно числа, напр. до 20, 40; имъ показывается брусокъ, замѣняющій десятокъ кубиковъ; этотъ брусокъ измѣряется однимъ кубикомъ, или изъ десяти отдѣльныхъ кубиковъ составляется рядъ, къ которому прикладывается брусокъ, и ученики убѣждаются въ томъ, что однимъ брускомъ можно въ счетѣ замѣнить десять кубиковъ; этотъ брусокъ заключаетъ, значитъ, въ себѣ *десятокъ* кубиковъ.

Предлагаются вопросы: „въ десяткѣ сколько единицъ, во сколько разъ десятокъ больше одного, сколько кубиковъ въ двухъ, трехъ, пяти десяткахъ?" и т. п. Для упражненія ученикамъ предлагается изъ кубиковъ и брусковъ составить числа: 56, 79, 88, 99. На доску выставляется 6 брусковъ и 4 кубика, 7 брусковъ и 8 кубиковъ, и ученики читаютъ выставленныя числа; вмѣсто выставленныхъ 4 брусковъ и 16 кубиковъ ученики берутъ 5 брусковъ и 6 кубиковъ, замѣняя 10 кубиковъ однимъ брускомъ и поясняя при этомъ, почему такъ удобнѣе считать.

При сравненіи кубика съ брускомъ выясняется, что то и другое составляетъ одинъ предметъ, и что счетъ брусковъ ведется по тому же пріему, какъ и счетъ кубиковъ, но что предметы эти разнятся между собою по величинѣ и что, считая кубики десятками посредствомъ брусковъ, мы ведемъ счетъ въ 10 разъ скорѣе, нежели считая отдѣльными кубиками. Такимъ образомъ, и кубикъ, и брусокъ суть *единицы*, но кубикъ есть единица одного рода, а брусокъ единица другаго рода; въ счетѣ кубикъ называется единицею *перваго разряда*, а брусокъ или десятокъ кубиковъ—единицею *втораго разряда*.

Для закрѣпленія въ сознаніи и памяти учениковъ этихъ понятій имъ предлагаются повторительные вопросы: „Сколько составится кубиковъ, если я возьму 4 единицы втораго разряда и 7 единицъ перваго; сколько кубиковъ въ 6 единицахъ втораго разряда и 25 единицахъ перваго; въ 74 сколько единицъ перваго разряда, сколько втораго; изъ сколькихъ единицъ перваго разряда состоитъ все число?" и т. п. Послѣ этихъ упражненій ученикамъ вкратцѣ напоминается пріемъ написанія двузначныхъ чиселъ и выспрашивается у нихъ значеніе цифры по мѣсту ею занимаемому, а также производится разложеніе двузначнаго числа на разряды ($86=80+6$); и обратно: число, выраженное въ отдѣльныхъ разрядахъ, читается и пишется при совокупности обоихъ разрядовъ ($50+9=59$).

При переходѣ къ счету сотнями, 100 отдѣльныхъ кубиковъ складываются въ одинъ квадратный слой; ученики насчитываютъ въ немъ

10 десятковъ и составляютъ такой же слой изъ 10 брусковъ. Такой слой брусковъ представляетъ въ свою очередь десятокъ, а по отношенію къ отдѣльному кубику—*сотню*. Сотня кубиковъ замѣняется одною *единицею*—доскою. Доска эта измѣряется сначала брускомъ, а потомъ отдѣльнымъ кубикомъ. Предлагаются вопросы: „въ доскѣ сколько помѣщается брусковъ, сколько отдѣльныхъ кубиковъ; сотня во сколько разъ больше десятка, больше единицы; какъ составить сотню изъ десятковъ; какъ составить ее изъ единицъ перваго разряда; въ двухъ, трехъ, пяти сотняхъ сколько десятковъ, сколько единицъ; какіе предметы считаются, продаются сотнями; чѣмъ замѣняется сотня копеекъ; въ рублѣ сколько гривенниковъ; на сколько копеекъ можно размѣнять 3, 6, 8 рублей?" и т. п.

Сотня кубиковъ (доска), какъ отдѣльный предметъ, есть также единица въ счетѣ кубиковъ, но она въ 10 разъ больше единицы втораго разряда и въ 100 разъ больше единицы перваго разряда, а потому сотню называютъ единицею *третьяго разряда*.

Для упражненія учениковъ въ счетѣ единицъ трехъ разрядовъ имъ предлагается сосчитать число кубиковъ, составленное учителемъ на классной доскѣ изъ досокъ, брусковъ и отдѣльныхъ кубиковъ; сказать, сколько въ этомъ числѣ единицъ каждаго разряда; продиктованное учителемъ число выставить изъ ящика на доскѣ и пояснить, почему именно столько-то взято досокъ и столько-то брусковъ. Ученики рѣшаютъ вопросы: „какое составится число изъ двухъ единицъ втораго разряда, 4 единицъ третьяго и 7 единицъ перваго; въ числѣ 806 сколько единицъ третьяго разряда, втораго, перваго; изъ сколькихъ единицъ втораго и перваго разряда составлено все число; какъ записать число, въ которомъ 5 единицъ третьяго разряда, 6 единицъ втораго и 8 единицъ перваго; почему 5 нужно поставить на третьемъ мѣстѣ; какъ составить это число изъ кубиковъ, брусковъ и досокъ?" и т. п.

Затѣмъ, идутъ упражненія въ счетѣ и написаніи чиселъ. Переходъ къ написанію трехзначныхъ чиселъ ученики совершаютъ сами легко по аналогіи съ числами двузначными и безошибочно указываютъ мѣста, на которыхъ нужно ставить цифры, обозначающія различные разряды числа.

Учитель пишетъ на доскѣ:

5	единицъ	1-го	разряда
8	„	3-го	„
6	„	2-го	„

или { 4 единицы 2-го разряда
7 единицъ 3-го „

или { 6 „ 1-го „
2 единицы 3-го „

Эти числа, выраженныя въ разрядахъ, ученики читаютъ или записываютъ по усвоенной системѣ; обратно, число, написанное учителемъ на доскѣ, напр. 486, ученики разлагаютъ на разряды:

486 = 4 единицамъ 3-го раз. + 8 един. 2-го разр. + 6 един. 1-го разряда.

или 486 = 4 сотн. + 8 дес. + 6 един.

или 486 = 400 + 80 + 6.

При переходѣ къ счету тысячами ученикамъ предлагается сосчитать число всѣхъ кубиковъ въ ящикѣ; счетъ этотъ они ведутъ по горизонтальнымъ слоямъ, то-есть сотнями, насчитываютъ въ ящикѣ 10 досокъ или сотенъ; каждая сотня заключаетъ въ себѣ 10 десятковъ, слѣдовательно въ ящикѣ 100 десятковъ (брусковъ); въ одномъ брускѣ 10 кубиковъ, слѣдовательно во всемъ ящикѣ 100 разъ по 10 кубиковъ; получается новое число—*тысяча*. Тысяча кубиковъ есть новая единица въ счетѣ; въ отличіе отъ другихъ единицъ она называется *единицею четвертаго разряда*.

Получивъ совершенно наглядное представленіе о количествѣ, о массѣ числа, выраженнаго тысячью, ученики безъ всякаго затрудненія могутъ образовать представленіе о числѣ, выраженномъ нѣсколькими тысячами; такъ вмѣстѣ съ выраженіемъ „8 тысячъ кубиковъ“ у нихъ въ сознаніи рельефно образуется представленіе о 8 ящикахъ, наполненныхъ кубиками. Можно быть послѣ этого увѣреннымъ, что ученикъ при расширеніи счета до какого-угодно предѣла будетъ имѣть дѣло не съ цифрою только, а съ дѣйствительнымъ числомъ, выраженнымъ цифрами. Имѣя раздѣльное представленіе о тысячѣ кубиковъ, ученикъ легко самъ образуетъ въ своемъ сознаніи представленіе о тысячѣ какихъ-угодно извѣстныхъ ему предметовъ, а, наконецъ, составляетъ понятіе о тысячѣ единицъ вообще, то-есть незамѣтно переходитъ къ числу абсолютному.

Не входя въ дальнѣйшія подробности по изученію нумераціи до 1000, какъ вопросу весьма легкому при употребленіи нагляднаго пособія, я приведу только образцы вопросовъ и упражненій, служащихъ для повторенія и обобщенія всего усвоеннаго учениками.

„Какъ можно считать предметы? Что называется единицею въ счетѣ предметовъ? Что называется вообще числомъ? Какія единицы счета извѣстны вамъ? Какъ называется единица 1-го, 2-го, 3-го, 4-го

разряда? Какое число получится, если я возьму 7 единицъ втораго разряда, 5 единицъ третьяго, 4 единицы четвертаго и 2 единицы перваго разряда?“

„Въ числѣ 2048 сколько единицъ каждаго разряда? Какое число кубиковъ составится изъ 4 полныхъ ящиковъ, 16 досокъ, 38 брусковъ и 46 отдѣльныхъ кубиковъ? Какъ записать число 506? На какомъ мѣстѣ нужно поставить 5? Почему на третьемъ мѣстѣ? Что нужно поставить на второмъ мѣстѣ и почему? Напишите число 1547. Что означаетъ цифра 4, цифра 1? Почему цифра 5 поставлена на третьемъ мѣстѣ? Отъ чего зависитъ значеніе цифры въ числѣ? На какомъ мѣстѣ ставится при написаніи числа цифра, означающая десятки, единицы, тысячи? Нужно ли писать наименованіе разрядовъ при каждой цифрѣ? Можно ли 2 пуда 3 фун. 5 лот. написать безъ наименованія каждой цифры? Почему тогда будетъ непонятно? Прочтите число 3004. Сколько надо имѣть кубиковъ, чтобы составить это число? Почему вы читаете: „3 тысячи, 4 единицы?“

Составить число изъ:

4	единицъ	3-го	разряда	2405
5	„	1-го	„	
2	„	4-го	„	

Составить число изъ:

9	единицъ	2-го	разряда	999
9	„	3-го	„	
9	„	1-го	„	

Чего послѣднему числу не достаетъ до 1000?

Разложить число 5672 по разрядамъ.

$5672 = 5000 + 600 + 70 + 2.$

Какія числа можно написать посредствомъ цифры 4?

(4, 44, 444, 4444 и проч.).

Въ числѣ 444 вторая цифра во сколько разъ означаетъ больше, нежели первая справа; а третья цифра во сколько разъ означаетъ болѣе первой?

Занятіе одной нумераціей въ теченіи нѣсколькихъ уроковъ въ рядъ, хотя бы и при помощи наглядныхъ пособій, есть работа вообще однообразная и потому утомительная; вначалѣ ученики интересуются ею въ высшей степени, но потомъ, при однообразіи упражненій и вопросовъ, начинаютъ уставать и перестаютъ быть внимательными.

Съ цѣлію дать нѣкоторое разнообразіе классной работѣ, а еще

болѣе съ цѣлію освоить учениковъ съ новыми числами, нужно параллельно съ упражненіями въ нумераціи предлагать ученикамъ для рѣшенія задачи, въ которыя входятъ числа въ различныхъ комбинаціяхъ разрядовъ и которыя рѣшаются на основаніи усвоеннаго соотношенія единицъ различныхъ разрядовъ изъ упражненій при помощи ариѳметическаго ящика, а также на основаніи тѣхъ пріемовъ, которые они пріобрѣли, проходя предшествовавшіе курсы. Такого рода устныя задачи помѣщены въ „Сборникѣ" въ отдѣлѣ I подъ заглавіемъ: Устныя задачи на числа до 1000.

Образцы рѣшенія задачъ.

Задача. (Изъ Сборника № 767). Крестьянка повезла на рынокъ 4 сотни яицъ; на дорогѣ она 3 десятка разбила, а всѣ остальныя яица продала. Сколько денегъ получила она отъ этой продажи, если 2 сотни 5 десятковъ яицъ продала по 20 коп. за десятокъ, а всѣ остальныя яица — по 1 руб. за сотню?

Изъ 4 сотенъ крестьянка разбила 3 десятка яицъ, значитъ продала она 3 сот. и 7 десятковъ, потому что въ одной сотнѣ 10 десятковъ, а если отъ 10 десятковъ отнять 3 десят., то останется 7 десят., да еще было 3 сотни. Десятокъ первыхъ яицъ она продавала по 20 коп., значитъ 5 дес. продала за 1 руб., потому что 5 разъ 20 коп. будетъ 100 коп. или 1 рубль; если 10 яицъ стоютъ 20 коп., то сотня стоитъ въ 10 разъ болѣе, то-есть 200 коп. или 2 рубля, а 2 сотни еще въ 2 раза болѣе, то-есть 2 руб. $\times 2 = 4$ руб. Итакъ, первыя яица проданы за 4 руб. $+$ 1 руб., то-есть за 5 руб. Всѣхъ яицъ было три сотни и 7 десят., изъ нихъ первыхъ было 2 сот. 5 дес., значитъ остальныхъ было 1 сот. 2 десят.; сотня послѣднихъ яицъ продана за 1 руб., значитъ десятокъ продавался за 10 коп., потому что десятокъ меньше сотни въ 10 разъ, а 10-я часть рубля, или 100 коп., равна 10 коп.; значитъ 2 десятка проданы за 2 раза 10 коп., то-есть за 20 коп. Итакъ, остальныя яица проданы за 1 руб. $+$ 20 коп., то-есть за 1 руб. 20 коп. Всего крестьянка получила 5 руб. да 1 руб. 20 коп., или 6 руб. 20 коп.

Задача. (Изъ Сборника № 795). Садовникъ сорвалъ въ своемъ саду 6 сотенъ яблокъ; 120 яблокъ онъ продалъ въ деревнѣ нѣсколькимъ покупателямъ, каждому по десятку, а всѣ остальныя яблоки разложилъ поровну въ 12 корзинокъ и повезъ въ городъ. Сколько яблокъ положилъ садовникъ въ каждую корзинку и сколькимъ покупателямъ продалъ онъ яблоки въ деревнѣ?

Садовникъ сорвалъ въ саду 6 сотенъ яблокъ, что составляетъ 60 десятковъ; изъ нихъ 120 яблокъ или 12 десятковъ яблокъ онъ

продалъ нѣсколькимъ покупателямъ, по десятку каждому, значитъ 12-ти покупателямъ; было 60 десятковъ яблокъ, а продано 12 десятковъ, слѣд. осталось 48 десятковъ; эти 48 десятковъ яблокъ садовникъ разложилъ поровну въ 12 корзинокъ, а 12-я часть 48 есть 4, слѣд. въ каждую корзинку онъ положилъ по 4 десятка яблокъ.

Задача. Для прокормленія лошадей купили сперва 2 чт. овса, потомъ еще 1 чт. 6 чк. и, наконецъ, еще 1 чт. 2 чк. На сколько дней хватило всего этого овса, если въ день расходовали по 1 чк. 2 гар.?

Во всѣ 3 раза куплено было овса 2 чт. да 1 чт. 6 чк. да еще 1 чт. 2 чк., что составляетъ 4 чт. 8 чк. или 5 чт.; въ 5 четвертяхъ заключается 5 разъ по 8 четвериковъ, то-есть 40 четвериковъ, а въ 40 четверикахъ заключается 40 разъ по 8 гарнцевъ, то-есть 320 гарнцевъ. Въ день расходовали по 1 чк. 2 гар. или по 10 гарнцевъ, то-есть по одному десятку гар., а въ 320 гарнцахъ заключается 32 десятка гар., слѣд. овса хватило на 32 дня.

Задача. (Изъ сборника № 771). Сколько купецъ получилъ за 426 карандашей, если продавалъ каждый карандашъ по 3 коп.?

Письменное рѣшеніе.

1	каранд.	стоитъ	3 коп.
10	„	„	3 коп. × 10 = 30 коп.
100	„	„	3 коп. × 100 = 3 руб.
6	„	„	3 коп. × 6 = 18 коп.
20	„	„	30 коп. × 2 = 60 коп.
400	„	„	3 руб. × 4 = 12 руб.
426	„	„	12 руб. + 60 коп. + 18 коп. = 12 руб. 78 коп.

На рѣшеніи задачъ, подобныхъ послѣдней, учащіеся основательно знакомятся съ отношеніями единицъ различныхъ разрядовъ десятичной системы нумераціи.

Б. Нумерація чиселъ до высшихъ предѣловъ.

Хорошимъ нагляднымъ пособіемъ при прохожденіи этого отдѣла могутъ служить классные ариѳметическіе счеты. Переходъ отъ ариѳметическаго ящика къ счетамъ важенъ въ томъ отношеніи, что прежде ученики различали единицы различныхъ разрядовъ вполнѣ наглядно, прямо по величинѣ, а теперь они отличаютъ ихъ по мѣсту ими занимаемому въ числѣ и потомъ совершаютъ послѣдовательный наглядный переходъ къ десятичному счисленію посредствомъ цифръ.

1) На горизонтальныхъ проволокахъ.

Всѣ шары, расположенные по десяти на каждой проволокѣ, сдвигаются въ одну сторону счетовъ и закрываются доскою, придѣланною къ рамкѣ, такъ что къ классу обращена эта доска и половины проволокъ безъ шаровъ. Ученики считаютъ по одному шару, передвигаемому учителемъ изъ-за доски на другой конецъ первой верхней или нижней проволоки, до 10 и убѣждаются въ томъ, что больше шаровъ на этой проволокѣ нѣтъ.

Десять шаровъ составляютъ *десятокъ*, и подобно тому, какъ одна монета гривенникъ замѣняетъ 10 другихъ монетъ—копеекъ, можно и на проволокахъ, для дальнѣйшаго счета, десять шаровъ, взятыхъ на первой проволокѣ, замѣнить однимъ—на второй и помнить, что онъ означаетъ десятокъ. Затѣмъ, если откладывать шары на второй проволокѣ, то это будетъ счетъ десятками, а не единицами.

Для упражненія ученикамъ предлагаются вопросы: „Какъ откинуть на счетахъ 30? Почему надо взять 3 шара на второй проволокѣ, а не на первой? Какъ положить на счетахъ число шаровъ, соотвѣтствующее 9 копейкамъ, 10 копейкамъ, 7 гривенникамъ, 46 копейкамъ? Какое число составится, если на первой проволокѣ взять 4 шара, а на второй 7?“ и т. д.

Подобно тому, какъ единицы перваго и втораго разряда отсчитываются на различныхъ проволокахъ счетовъ, такъ и при написаніи числа цифры, выражающія число единицъ каждаго изъ разрядовъ, получаютъ свое значеніе отъ мѣста, ими занимаемаго.

По требованію учителя ученикъ откладываетъ на счетахъ число 99, взявъ на первой и на второй проволокѣ по 9 шаровъ; затѣмъ рѣшаетъ вопросъ, что получится, если прибавить еще единицу перваго разряда. Тогда 10 шаровъ, находящихся на первой проволокѣ, откидываются обратно и замѣняются однимъ шаромъ на второй, на которой такимъ образомъ получается 10 шаровъ, означающихъ 10 десятковъ. Для дальнѣйшаго счета десятками эти 10 шаровъ отодвигаются и замѣняются по прежнему пріему однимъ шаромъ на третьей проволокѣ. Такимъ образомъ, этотъ одинъ шаръ замѣняетъ собою 10 шаровъ, отсчитываемыхъ на второй проволокѣ, или 100 шаровъ на первой, и означаетъ *сотню*.

Для упражненія въ счетѣ единицами трехъ разрядовъ ученики читаютъ числа, откидываемыя учителемъ на счетахъ, или берутъ на счетахъ числа, диктуемыя учителемъ; пишутъ числа по шарамъ, откинутымъ на счетахъ; берутъ на счетахъ числа, записанныя учителемъ

на доскѣ, а также устно рѣшаютъ вопросы: „какъ взять на счетахъ число 340; какое получится число, если на первой проволокѣ счетовъ взять 6 шаровъ, а на третьей 7; почему это число читается 706, а не 76?“ и т. п.

Взявъ на счетахъ 999, ученикъ прибавляетъ еще единицу, получаетъ 10 шаровъ на первой проволокѣ и замѣняетъ ихъ однимъ шаромъ на второй; полученные 10 шаровъ на второй проволокѣ замѣняетъ однимъ шаромъ на третьей и, наконецъ, 10 шаровъ третьей проволоки замѣняетъ однимъ шаромъ на четвертой. Получается такимъ образомъ *тысяча—единица четвертаго разряда.*

Затѣмъ, идутъ тѣ же упражненія въ чтеніи, написаніи и откладываніи на счетахъ четырезначныхъ чиселъ, какъ и при предъидущихъ разрядахъ.

Взявъ на счетахъ 9999 и прибавивъ еще единицу, ученики получившіеся 10 шаровъ на четвертой проволокѣ замѣняютъ однимъ шаромъ на пятой и получаютъ *десятокъ тысячъ—единицу пятаго разряда.* Точно также получаются единицы разрядовъ высшихъ до какого-угодно предѣла.

При послѣдовательности образованія единицъ различныхъ разрядовъ, написаніе и откладываніе на счетахъ чиселъ не представятъ для учениковъ ни малѣйшей трудности, и они весьма легко дѣлаютъ переходъ отъ счетовъ къ цифрамъ и обратно.

Не входя по этому вопросу въ дальнѣйшія подробности, я приведу здѣсь рядъ вопросовъ и упражненій, служащихъ для повторенія нумераціи. „Какіе разряды единицъ различаются въ числахъ? Какъ называются единицы 2-го, 5-го, 7-го разряда? Какое число составится изъ 4 единицъ 6-го разряда и 7 единицъ третьяго? Какъ взять на счетахъ 9 десятковъ тысячъ, 72 сотни тысячъ, 12 милліоновъ? и т. п. Взять на счетахъ числа: 4096, 72040, 5060420.“ и т. п.

Читаются числа, взятыя на счетахъ. Записываются числа, продиктованныя учителемъ. Откладываются на счетахъ числа, продиктованныя учителемъ. Разложить число 76040 по разрядамъ (70000+6000+40). Составить числа изъ единицъ слѣдующихъ разрядовъ:

$$\left\{\begin{matrix} 5 \text{ единицъ } 3\text{-го разряда} \\ 7 \quad „ \quad 6\text{-го} \quad „ \\ 9 \quad „ \quad 1\text{-го} \quad „ \\ 8 \quad „ \quad 5\text{-го} \quad „ \end{matrix}\right\} 780509$$

$$\text{или} \left\{\begin{matrix} 4 \text{ единицъ } 4\text{-го разряда} \\ 2 \quad „ \quad 1\text{-го} \quad „ \\ 8 \quad „ \quad 7\text{-го} \quad „ \end{matrix}\right\} 8004002$$

и т. д.

Въ числѣ 547256 сколько всего десятковъ, сотенъ, тысячъ, десятковъ тысячъ, сотенъ тысячъ? Показать это на счетахъ.

Отъ чего зависитъ значеніе каждой цифры въ данномъ числѣ? Что сдѣлается съ числомъ единицъ каждаго разряда, если въ концѣ числа справа приписать нуль, если откинуть нуль? Что сдѣлается съ числомъ, если къ нему слѣва приписать нуль? Что сдѣлается съ числомъ, если вставить нуль между цифрами числа? Какія цифры получатъ бо̀льшее значеніе, какія останутся при прежнемъ значеніи? Какъ увеличить число въ 10, 100, 1000 разъ? Какъ число, оканчивающееся нулями, уменьшить въ 10, 100 разъ? Какъ увеличить число въ 20, 30, 40 разъ? (Достаточное число упражненій въ чтеніи и писаніи большихъ чиселъ приведено въ Сборникѣ въ отдѣлѣ II подъ заглавіемъ: Примѣры на словесное и письменное счисленіе.)

При написаніи и чтеніи большихъ чиселъ учитель указываетъ ученикамъ на удобство распредѣленія единицъ разрядовъ по классамъ.

1-й классъ { единицы, десятки, сотни

2-й классъ { тысячи, десят. тыс., сотни тыс.

3-й классъ { милліоны, десят. милліон., сотни милліон.

4-й классъ { тысячи мил., десят. тыс. мил., сотни тыс. мил.

5-й классъ { билліоны, десятки бил., сотни бил.

Въ новѣйшихъ учебникахъ считается за болѣе удобную французская система распредѣленія разрядовъ по классамъ, причемъ каждый классъ имѣетъ свое спеціальное названіе:

1-й классъ { единицы, десятки, сотни

2-й классъ { тысячи, десят. тыс., сотни тыс.

3-й классъ { милліоны, десят. милліон., сотни милліон.

4-й классъ { билліоны, десят. бил., сотни бил.

5-й классъ { трилліоны, десят. трил., сотни трил.

Такимъ образомъ, по этой системѣ

1 билліонъ = 1,000,000,000

а по нашей

1 билліонъ = 1,000,000,000,000.

2) На вертикальныхъ проволокахъ.

Нѣкоторые учители считаютъ болѣе удобнымъ наглядно выяснять нумерацію и пріемъ написанія чиселъ на вертикальныхъ проволокахъ счетовъ, потому что здѣсь на каждой проволокѣ помѣщается только по 10 шаровъ (на другихъ счетахъ даже только 9), такъ что дальнѣйшаго счета шаровъ производить на этой проволокѣ уже нельзя, и само собою является необходимость переходить къ слѣдующей проволокѣ; кромѣ того, шары, выражающіе различные разряды чиселъ, располагаются на счетахъ въ томъ же порядкѣ справа на-лѣво, въ какомъ располагаются и цифры въ написанномъ числѣ. Удобство же счета на горизонтальныхъ проволокахъ состоитъ въ томъ, что здѣсь шары только передвигаются съ одного конца проволоки на другой, а на вертикальныхъ проволокахъ ихъ надо постоянно надѣвать или снимать.

Само собою понятно, послѣ описанія работъ на горизонтальныхъ проволокахъ счетовъ, какъ вести тѣ же упражненія на проволокахъ вертикальныхъ.

Для упражненій учениковъ въ сравненіи между собою разрядовъ по величинѣ имъ предлагаются задачи изъ „Сборника“, помѣщенныя подъ заглавіемъ: „Устныя задачи на числа до 1000“.

Задача. На торговомъ суднѣ изъ-за границы привезено 10 кулей яблокъ, по 2 тыс. 4 десятка въ каждомъ. Яблоки эти пересыпаны въ мѣшки: 40 большихъ по 2 сот. 6 дес. и 100 меньшихъ. По скольку яблокъ всыпано въ каждый меньшій мѣшокъ?

Рѣшеніе. Въ одномъ кулѣ яблокъ 2 тыс. 4 дес., то въ 10 куляхъ 20 тыс. 40 дес. или 20 тыс. 4 сотни. Въ каждый большой мѣшокъ всыпано по 2 сот. 6 дес., то въ 40 мѣшковъ всыпано 80 сот. 240 дес. или 8 тыс. 24 сот., или 10 тыс. 4 сотни. Изъ 20 тыс. 4 сотенъ, если отнять 10 тыс. 4 сотни, останется 10 тыс. Эти 10 тысячъ яблокъ всыпаны въ 100 малыхъ мѣшковъ; значитъ, въ каждый пришлось по 100 яблокъ, потому что въ 10 тысячахъ 100 сотенъ.

Четыре дѣйствія съ числами любой величины.

Послѣ достаточнаго знакомства учениковъ съ составомъ чиселъ на основаніи изученія нумераціи и рѣшенія задачъ, относящихся къ этому отдѣлу, а также послѣ основательнаго усвоенія ими при изученіи чиселъ первой сотни сущности каждаго изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій и пріемовъ совершенія этихъ дѣйствій на составныхъ именованныхъ числахъ, весьма хорошимъ приложеніемъ всего пройденнаго служитъ выясненіе ученикамъ механизма четырехъ дѣйствій съ числами любой величины. Употребленіе наглядныхъ пособій при прохожденіи этого отдѣла становится уже излишнимъ, такъ какъ этотъ отдѣлъ представляетъ только дальнѣйшее приложеніе къ новымъ числамъ всего извѣстнаго ученикамъ. Только въ виду пріученія учениковъ къ практическому пользованію торговыми счетами можно предлагать имъ производить вычисленіе на счетахъ; но такъ какъ эти упражненія преслѣдуютъ уже чисто практическую цѣль, и притомъ имѣются книги, въ которыхъ достаточно подробно приведены различнаго рода практическія упражненія на счетахъ, то я считаю излишнимъ излагать здѣсь эти упражненія.

Такъ какъ задачи и численные примѣры на всѣ 4 дѣйствія расположены въ моемъ Сборникѣ въ одной и той же послѣдовательности, то каждое дѣйствіе можетъ изучаться 1) или на однѣхъ задачахъ или на однихъ примѣрахъ, 2) задачи могутъ служить для классной работы учениковъ, а численные примѣры для внѣклассной и 3) для разнообразія классной работы задачи на каждое изъ четырехъ дѣйствій могутъ чередоваться съ численными примѣрами.

Правила дѣйствій слѣдуетъ выводить въ общепринятомъ порядкѣ расположенія четырехъ дѣйствій.

Задачи расположены въ первомъ отдѣлѣ Сборника подъ рубриками: задачи на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія, а численные примѣры во второмъ отдѣлѣ того же Сборника подъ рубриками: численные примѣры на сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе и на всѣ 4 дѣйствія съ отвлеченными числами.

Сложеніе.

Приступая къ выводу сложенія большихъ чиселъ, необходимо произвести слѣдующія предварительныя устныя упражненія:

1) Повторить извѣстный уже учащимся пріемъ сложенія чиселъ двузначныхъ, прилагая его къ слагаемымъ, дающимъ въ суммѣ болѣе 100; напримѣръ, задачу (изъ Сборника № 813): „Въ городѣ 95 православ-

ныхъ церквей и 34 иновѣрческихъ. Сколько всего церквей въ этомъ городѣ?“ ученики рѣшаютъ такъ: $90+30=120$, $5+4=9$, а $120+9=129$.

2) Рядомъ упражненій показать учащимся, что сложеніе между собою сотенъ, а также сложеніе чиселъ, состоящихъ изъ сотенъ и десятковъ, производится по тѣмъ же пріемамъ, какъ и сложеніе чиселъ, состоящихъ изъ однихъ десятковъ, или изъ десятковъ и единицъ. Напримѣръ, задача (изъ Сборника № 817): „Въ селѣ стояло 610 пѣхотныхъ солдатъ и 340 конныхъ. Сколько всего солдатъ было расположено въ этомъ селѣ?“ рѣшается такъ: $600+300=900$, $10+40=50$, $900+50=950$.

Для этихъ упражненій даны въ Сборникѣ задачи отъ № 811 до № 818 и численные примѣры отъ № 388 до № 395.

Послѣ подобныхъ упражненій, требующихъ не болѣе одного, двухъ уроковъ, дѣлается переходъ къ сложенію двухъ слагаемыхъ, состоящихъ изъ трехъ разрядовъ, выбирая вначалѣ слагаемыя такъ, чтобы отъ сложенія отдѣльныхъ разрядовъ въ суммѣ получалось не болѣе 9, то-есть, чтобы изъ этой суммы не приходилось выключать единицы высшаго разряда.

Задача. (Изъ Сборника № 819). При разведеніи рощи употребили 713 фун. березоваго сѣмени и 156 фун. сосноваго. Сколько всего сѣмени пошло на разведеніе этой рощи?

Ученики могутъ употребить для сложенія данныхъ чиселъ одинъ изъ трехъ пріемовъ:

1) Выписавъ слагаемыя въ рядъ, $713+156$, будутъ производить сложеніе, начиная съ сотенъ, то-есть по тому пріему, которымъ они пользовались при устныхъ вычисленіяхъ, и будутъ записывать результатъ сложенія по разрядамъ такъ: $700+100=800$, $10+50=60$, $3+6=9$, а $800+60+9=869$.

2) Прилагая пріемъ сложенія, выведенный для составныхъ именованныхъ чиселъ, ученики разложатъ данныя слагаемыя на разряды:

$$\begin{array}{r} 7 \text{ сот. } 1 \text{ дес. } 3 \text{ един.} \\ +\ 1 \text{ сот. } 5 \text{ дес. } 6 \text{ един.} \\ \hline 8 \text{ сот. } 6 \text{ дес. } 9 \text{ един.} = 869. \end{array}$$

3) Могутъ прямо, не разлагая чиселъ на отдѣльные разряды, написать ихъ одно подъ другимъ и произвести сложеніе, начиная его съ сотенъ или единицъ:

$$\begin{array}{r} 713 \\ +\ 156 \\ \hline 869 \end{array}$$

По какому бы изъ этихъ пріемовъ ни было произведено сложеніе, работу учениковъ надо провѣрить, предлагая имъ вопросы: какая получилась сумма, откуда получилось 8 сотенъ, 6 десятковъ, 9 единицъ, съ какого разряда начали сложеніе? Затѣмъ, изъ трехъ пріемовъ указывается на третій, какъ на болѣе удобный при письменномъ вычисленіи.

Дальнѣйшая работа учениковъ должна состоять въ нахожденіи суммы двухъ трехзначныхъ слагаемыхъ, у которыхъ сначала сумма единицъ превышаетъ число 9, потомъ, какъ сумма единицъ, такъ и сумма десятковъ, больше 9 и, наконецъ, отъ сложенія каждаго изъ трехъ разрядовъ получается число больше 9.

Задача. (Изъ Сборника № 822). При устройствѣ тротуара по одну сторону улицы употребили 869 плитъ, а по другую—798 плитъ. Сколько всего плитъ пошло для устройства этого тротуара?

Послѣ усвоенія учениками содержанія задачи имъ предлагаются вопросы: Что ищется въ задачѣ? Сколько всего плитъ пошло для устройства тротуара. Какъ это найти? Нужно сложить числа 869 и 798. Найдите же сумму этихъ двухъ чиселъ.

Ученики, подписавъ числа одно подъ другимъ, на основаніи вывода изъ предъидущаго упражненія,

$$\begin{array}{r} 869 \\ +\,798 \\ \hline \end{array}$$

могутъ начать сложеніе съ сотенъ или единицъ; но, начавъ сложеніе съ сотенъ, тотчасъ же замѣтятъ неудобство написанія суммы и, вслѣдствіе этого, употребятъ опять одинъ изъ прежнихъ пріемовъ сложенія, получатъ сумму 1667 и подпишутъ ее подъ чертою.

$$\begin{array}{r} 869 \\ +\,798 \\ \hline 1667 \end{array}$$

Если письменныя упражненія съ составными именованными числами до 100 пройдены основательно, то ученики не затруднятся сами приложить извѣстный имъ пріемъ сложенія къ данному случаю, когда слагаемыя не разбиты на отдѣльные разряды, то-есть начнутъ сложеніе съ единицъ низшаго разряда и, получивъ въ суммѣ семнадцать (8 + 9) единицъ, выключатъ одинъ десятокъ, придадутъ его къ десяткамъ слагаемыхъ чиселъ и т. д.

Тѣмъ не менѣе, для установленія и закрѣпленія простѣйшаго пріема сложенія, слѣдуетъ предложить ученикамъ рядъ вопросовъ:

Какъ получилось въ суммѣ 7 единицъ? Отъ сложенія 9 и 8 единицъ получилось 17 единицъ, но $17 = 10 + 7$, слѣдовательно, выключивъ изъ суммы единицъ одинъ десятокъ, получаемъ 7 единицъ.

Какъ получилось 6 десятковъ? Отъ сложенія 6 и 9 десятковъ получилось 15 десятковъ; 15 десятковъ да одинъ десятокъ, получившійся отъ сложенія единицъ, составятъ 16 десятковъ, а 16 десятковъ состоятъ изъ 10 десятковъ, то-есть одной сотни, и 6 десятковъ; слѣдовательно, исключивъ одну сотню изъ суммы десятковъ, получаемъ 6 десятковъ.

Какъ получилось въ суммѣ 16 сотенъ? Отъ сложенія 8 и 7 сотенъ получилось 15 сотенъ; 15 сотенъ да одна сотня, получившаяся отъ сложенія десятковъ, составляютъ 16 сотенъ или одну тысячу и 6 сотенъ.

Результатомъ всей работы на сложеніе чиселъ должно быть формулированіе учениками правила, что для сложенія чиселъ нужно: 1) *слагаемыя подписать одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного и того же разряда находились въ одномъ ряду*; 2) *сложеніе начинать съ единицъ, и сумму единицъ, если она не болѣе 9, подписывать подъ единицами, потомъ складывать десятки и т. д.*; 3) *если отъ сложенія какихъ-либо разрядовъ получится въ суммѣ болѣе 9 единицъ этого разряда, то изъ этой суммы выключить единицы слѣдующаго высшаго разряда, къ которому ихъ и придать, а остальное число подписать подъ тѣмъ разрядомъ, который складывался.*

Задачи и численные примѣры на сложеніе расположены въ Сборникѣ слѣдующимъ образомъ:

1) Задачи отъ № 818 до № 823 и численные примѣры отъ № 395 до № 400 даны на сложеніе двухъ трехзначныхъ чиселъ.

2) Задачи отъ № 823 до № 830 и численные примѣры отъ № 400 до № 408—на сложеніе двухъ четырезначныхъ чиселъ.

3) Задачи отъ № 830 до № 845 и численные примѣры отъ № 408 до № 417—на сложеніе различныхъ чиселъ.

Вычитаніе.

Послѣ вывода правила сложенія чиселъ упражненія на вычитаніе идутъ быстрѣе, такъ какъ ученикамъ, на основаніи сейчасъ изложеннаго, извѣстно удобство совершенія дѣйствія, начиная его съ единицъ низшаго разряда, а на основаніи упражненій съ составными именованными числами, извѣстенъ пріемъ занимаиія одной единицы высшаго наименованія, когда при вычитаніи числа какого-либо наименованія въ вычитаемомъ дано число большее, чѣмъ въ уменьшаемомъ. Такимъ образомъ, правило вычи-

танія большихъ чиселъ можно вывести въ одинъ урокъ, подбирая упражненія по степени трудности. Но, принявъ во вниманіе, что не столько важна быстрота вывода пріема механизма, сколько важенъ самый процессъ этого вывода, а также и то, что въ классѣ всегда есть ученики, для которыхъ быстрота работы затрудняетъ пониманіе дѣла, лучше упражненія, направляемыя къ выводу правила, расположить въ строгомъ послѣдовательномъ порядкѣ.

Планъ упражненій: 1) Устное вычитаніе двузначныхъ чиселъ. 2) Устное вычитаніе сотенъ. 3) Устное вычитаніе двузначнаго числа изъ сотенъ. 4) Устное вычитаніе изъ сотенъ числа, состоящаго изъ сотенъ и десятковъ. 5) Устное вычитаніе изъ сотенъ числа, состоящаго изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. 6) Письменное вычитаніе трехзначныхъ чиселъ, когда въ каждомъ разрядѣ уменьшаемаго единицъ достаточно для вычитанія изъ нихъ разрядовъ вычитаемаго. 7) Письменное вычитаніе трехзначныхъ чиселъ, когда приходится занимать единицы высшаго разряда. 8) Письменное вычитаніе трехзначныхъ чиселъ, когда въ уменьшаемомъ на мѣстѣ десятковъ поставленъ нуль, а для вычитанія единицъ приходится занимать 1 десятокъ. 9) Письменное вычитаніе четырезначныхъ и многозначныхъ чиселъ. 10) Выводъ правила механизма вычитанія.

Изъ всѣхъ приведенныхъ въ планѣ упражненій я остановлюсь только на краткомъ разъясненіи письменныхъ упражненій.

Задача. (Изъ Сборника № 845). Въ одномъ селѣ 589 дворовъ, а въ другомъ на 234 двора менѣе. Сколько дворовъ во второмъ селѣ?

Ученики пишутъ:

$$\begin{array}{r} -589 \\ 234 \\ \hline \end{array}$$

и производятъ вычитаніе, причемъ могутъ начать вычитаніе съ сотенъ или единицъ. Послѣ полученія разности 355 даютъ отвѣты на вопросы, какъ получилась цифра каждаго разряда и съ какого разряда начато вычитаніе.

Задача. (Изъ Сборника № 846). По одной и той же дорогѣ расположены три деревни. Отъ первой до третьей 683 версты, а отъ третьей до второй 359 верстъ. Какъ велико разстояніе отъ первой деревни до второй?

По даннымъ числамъ этой задачи ученики видятъ неудобство вычитанія, начиная съ сотенъ, и, примѣняя къ этому случаю пріемъ, выведенный для сложенія чиселъ, начнутъ вычитаніе съ единицъ. Въ случаѣ затрудненія при вычитаніи 9 единицъ изъ трехъ единицъ, не слѣдуетъ указывать ученикамъ на необходимость занять одинъ десятокъ, а лучше

предоставить имъ сдѣлать вычитаніе по какому-угодно пріему и получить разность, изъ разсмотрѣнія которой простѣйшій пріемъ получится въ видѣ вывода.

Ученики могутъ сдѣлать вычитаніе, необходимое для рѣшенія данной задачи, или устно, такъ: 683 — 300 = 383, 383 — 50 = 333, 333 — 9 = 324, или письменно, разлагая данныя числа на разряды по образцу составныхъ именованныхъ чиселъ:

− 6 сот.	8 дес.	3 един.
3 сот.	5 дес.	9 един.
3 сот.	2 дес.	4 един. = 324.

Когда разность, по какому бы ни было пріему, получена, предлагаются вопросы:

Какимъ образомъ въ разности получилось 4 единицы? Изъ трехъ единицъ нельзя вычесть 9 единицъ, а потому отъ 8 десятковъ уменьшаемаго взяли одинъ десятокъ, раздробили его въ 10 единицъ и придали къ тремъ единицамъ; получилось 13 единицъ, а 13 — 9 = 4.

Какъ получилось въ разности 2 десятка? Когда въ уменьшаемомъ отъ 8 десятковъ взяли 1 десятокъ для вычитанія единицъ, то осталось 7 десятковъ, а 7 десятковъ безъ 5 десятковъ = 2 десяткамъ.

Почему это вычитаніе неудобно было начинать съ сотенъ? Потому что послѣ вычитанія сотенъ и десятковъ оказалось бы, что 9 единицъ нельзя вычесть изъ трехъ единицъ и пришлось бы занимать одинъ десятокъ у самой разности.

Такимъ же образомъ ведется вычитаніе трехзначныхъ чиселъ въ томъ случаѣ, когда въ уменьшаемомъ на мѣстѣ десятковъ стоитъ нуль, а для вычитанія единицъ приходится занимать 1 десятокъ. Важно то, что ученики, не зная еще простѣйшихъ пріемовъ механизма вычисленій, могутъ, на основаніи предшествовавшихъ работъ, хотя бы посредствомъ длиннаго пріема, найти искомый результатъ. А когда результатъ найденъ, то изъ разсмотрѣнія процесса вычисленія ученики легко доходятъ до вывода пріема простѣйшаго.

Послѣ усвоенія простѣйшаго пріема вычитанія трехзначныхъ чиселъ, можно давать задачи на вычитаніе чиселъ четырезначныхъ и многозначныхъ.

Результатомъ всѣхъ упражненій на вычитаніе чиселъ должно быть окончательное формулированіе учениками правила, что для вычитанія чиселъ нужно: 1) *подписать вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы одного и того же разряда находились одна подъ другою;* 2) *начинать вычитаніе съ единицъ и число, получаемое отъ вычи-*

танія какого-либо разряда, писать подъ тѣмъ же разрядомъ; 3) *если число единицъ какого-либо разряда уменьшаемаго менѣе числа единицъ того же разряда вычитаемаго, то число этого разряда уменьшаемаго надо увеличить 10-ью, а слѣдующій высшій разрядъ уменьшаемаго одною единицею уменьшить;* 4) *если на мѣстѣ высшаго разряда, который приходится уменьшить единицею, стоитъ нуль, то считать этотъ разрядъ за 9, а слѣдующій высшій уменьшить единицею.*

Задачи и численные примѣры на вычитаніе расположены слѣдующимъ образомъ: 1) Задачи отъ № 845 до № 852 и численные примѣры отъ № 417 до № 424 даны на вычитаніе трехзначнаго числа изъ трехзначнаго, когда а) въ каждомъ разрядѣ уменьшаемаго достаточно единицъ для вычитанія изъ нихъ разрядовъ вычитаемаго, б) въ первомъ или во второмъ разрядахъ уменьшаемаго или въ томъ и другомъ единицъ недостаточно для вычитанія изъ нихъ разрядовъ вычитаемаго, в) на мѣстѣ единицъ или десятковъ или на мѣстѣ единицъ и десятковъ уменьшаемаго находятся нули. 2) Задачи отъ № 852 до № 861 и примѣры отъ № 424 до № 435 даны на вычитаніе четырезначныхъ чиселъ изъ четырезначныхъ, расположенныхъ въ такой же послѣдовательности, какъ и числа трехзначныя. 3) Задачи отъ № 861 до № 870 и примѣры отъ № 435 до № 447—на вычитаніе различныхъ многозначныхъ чиселъ. 4) Задачи отъ № 870 до № 878, въ которыхъ для опредѣленія искомаго дѣствіе вычитаніе приходится употреблять нѣсколько разъ.

Умноженіе.

Планъ упражненій: 1) Умноженіе однозначнаго числа на 10. 2) Умноженіе однозначнаго числа на 100. 3) Умноженіе двузначнаго числа на однозначное, а также на 10 и на 100. 4) Умноженіе однозначнаго числа на двузначное. 5) Умноженіе трехзначнаго числа на однозначное. 6) Умноженіе трехзначнаго числа на двузначное, у котораго на мѣстѣ единицъ находится нуль. 7) Умноженіе трехзначнаго числа на двузначное. 8) Умноженіе четырезначнаго и многозначнаго числа на двузначное. 9) Умноженіе многозначнаго числа на трехзначное. 10) Умноженіе многозначнаго числа на многозначное, причемъ въ серединѣ множителя, или въ концѣ, стоятъ нули.

Первые пять родовъ упражненій производятся устно или письменно, послѣдніе—письменно. Увеличеніе числа въ 10 и 100 разъ извѣстно ученикамъ изъ упражненій, приведенныхъ при изложеніи нумераціи, а потому не требуетъ съ моей стороны особыхъ поясненій.

Умноженіе двузначнаго числа на однозначное и обратно производится по пріему, усвоенному учащимися при изученіи чиселъ первой сотни.

Задача. (Изъ Сборника № 881). Овца (мериносъ) даетъ 21 фун. сала. Сколько сала получается съ 7 такихъ овецъ?

Для рѣшенія этой задачи 21 нужно умножить на 7. Умноженіе производится такъ: $20 \times 7 + 1 \times 7 = 140 + 7 = 147$.

Такой же пріемъ употребляется учащимися и при умноженіи трехзначнаго числа на однозначное.

Рѣшеніе задачи (изъ Сборника № 888): „Одна кубическая сажень свѣжихъ березовыхъ дровъ вѣситъ 375 пуд. Сколько вѣсу въ 5 куб. саж. такихъ дровъ?“ производится такъ:

$$375 \times 5 = 300 \times 5 + 70 \times 5 + 5 \times 5 = 1500 + 350 + 25 = 1875.$$

Послѣ достаточнаго числа упражненій, указанныхъ въ первыхъ пяти рубрикахъ плана, можно перейти къ письменному умноженію трехзначнаго числа на однозначное и къ выводу простѣйшаго пріема такого умноженія.

Ученикамъ предлагается задача:

Локомотивъ проходитъ въ минуту 345 саж. Какое разстояніе пройдетъ онъ въ 9 минутъ?

Ученики, не получивъ отъ учителя указанія на простѣйшій пріемъ умноженія, будутъ находить произведеніе 345 на 9 или по вышеуказанному пріему, или разложатъ 345 на разряды и станутъ производить умноженіе по пріему умноженія составнаго именованнаго числа.

3 сот. 4 дес. 5 един.
× 9

27 сот. 36 дес. 45 един.

3 тыс. 1 сот. 5 един. = 3105

Послѣ полученія произведенія, данныя числа и результатъ записываются въ сокращенномъ видѣ:

$$\begin{array}{r} 345 \\ \times 9 \\ \hline 3105 \end{array}$$

и учащіеся отвѣчаютъ на вопросы: „Какъ получилось въ произведеніи 5 единицъ, 0 десятковъ, 1 сотня, 3 тысячи? Откуда слѣдуетъ начинать умноженіе и почему?“ Отвѣты учениковъ сами собой очевидны.

Затѣмъ идутъ уже упражненія въ умноженіи трехзначныхъ и четырезначныхъ чиселъ на однозначное по выведенному простѣйшему пріему.

Для перехода къ умноженію на число двузначное, необходимо, какъ и указано въ планѣ, остановиться на умноженіи числа на такое двузначное, въ которомъ на мѣстѣ единицъ находится нуль.

Задача. (Изъ Сборника № 897). Изъ четверти коноплянаго сѣмени получается 56 фун. масла. Сколько масла добывается изъ 40 четвертей коноплянаго сѣмени?

Что ищется въ задачѣ? Сколько масла добывается изъ 40 четвертей коноплянаго сѣмени. Что для этого нужно сдѣлать? 56 фун. умножить на 40. Что значитъ 56 фун. умножить на 40? Это значитъ— взять 56 фун. сорокъ разъ, повторить слагаемымъ 56 фун. сорокъ разъ.

Какъ проще поступить, чтобы 56 фун. взять сорокъ разъ? Надо сперва 56 фун. взять 10 разъ и полученное число фун. повторить 4 раза.

(При затрудненіи учащихся въ отвѣтѣ на этотъ вопросъ, можно дать имъ поясненіе, что если число 56 написать слагаемымъ 40 разъ, то всѣ эти слагаемыя можно распредѣлить на 4 группы, въ каждой группѣ по 10 слагаемыхъ; сначала находится сумма каждой изъ четырехъ группъ—она будетъ одна и та же для всѣхъ группъ—и потомъ складываются полученныя 4 суммы или, что одно и то же, одна изъ нихъ умножается на 4.)

Сдѣлайте это умноженіе.

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 10 \\ \hline 560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 560 \\ \times 4 \\ \hline 2240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ \times 40 \\ \hline 2240 \end{array}$$

Откуда получился нуль на мѣстѣ единицъ въ произведеніи? Отъ умноженія 56 на 10 въ произведеніи получился нуль въ концѣ, а отъ умноженія 560 на 4 этотъ нуль снова остался въ концѣ произведенія. Откуда получилось въ произведеніи 224? Отъ умноженія 56 на 4.

Затѣмъ ученикамъ предлагаются задачи на умноженіе трехзначнаго и четырезначнаго числа на двузначное, въ которомъ на мѣстѣ единицъ находится нуль, и на трехзначное, на мѣстѣ единицъ и десятковъ котораго находятся нули.

Задачи. (Изъ Сборника № 899 и № 902). Кузнецъ каждый день выдѣлываетъ 238 гвоздей. Сколько гвоздей приготовитъ онъ въ 60 дней?

Сколько валоваго дохода получено въ годъ съ 500 вер. желѣзной дороги, если валовой сборъ съ каждой версты составилъ въ этотъ годъ 9789 руб.?

По вышеуказанному пріему ученики рѣшают предложенныя задачи:

$$\begin{array}{r} 238 \\ \times 60 \\ \hline 14280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9789 \\ \times \quad 500 \\ \hline 4894500 \end{array}$$

и по вопросамъ учителя убѣждаются въ томъ, что 1) въ первой задачѣ число десятковъ въ произведеніи получается отъ умноженія множимаго на цифру десятковъ множителя, а отъ умноженія на 10 получается только нуль въ концѣ произведенія и 2) во второй задачѣ число сотенъ въ произведеніи получается отъ умноженія множимаго на цифру сотенъ множителя, а отъ умноженія на 100 получаются только два нуля въ концѣ произведенія.

Замѣтивъ это, учащіеся приходятъ къ выводу, что, при умноженіяхъ такого рода, надо сперва множимое умножить на цифру десятковъ или сотенъ множителя и въ концѣ полученнаго произведенія приписать одинъ или два нуля.

На основаніи этого вывода они приходятъ также къ частному выводу, что удобнѣе подписывать множителя, выступая однимъ или двумя нулями изъ подъ множимаго, и лучше сразу написать въ произведеніи одинъ или два нуля, а потомъ, влѣво отъ нихъ, число, полученное отъ умноженія множимаго на цифру десятковъ или сотенъ множителя.

Теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію умноженія двузначныхъ чиселъ на двузначныя.

Задача. (Изъ Сборника № 907). Маятникъ дѣлаетъ каждую минуту 75 качаній. Сколько качаній производитъ онъ въ 37 минутъ?

Ученики требуемое въ задачѣ умноженіе производятъ такъ: берутъ 75 тридцать разъ и еще 7 разъ и полученныя произведенія складываютъ.

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 30 \\ \hline 2250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times 7 \\ \hline 525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times 37 \\ \hline + \; 2250 \\ 525 \\ \hline 2775 \end{array}$$

Затѣмъ, для повѣрки дѣйствія, учитель требуетъ сначала умножить 75 на 7, а потомъ 75 на 30.

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times \quad 7 \\ \hline 525 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times \quad 30 \\ \hline 2250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ \times 37 \\ \hline + \quad 525 \\ 2250 \\ \hline 2775 \end{array}$$

Измѣненіе будетъ состоять только въ перемѣнѣ порядка двухъ слагаемыхъ произведеній. Наконецъ, послѣ указанія учителя, что нуль, получаемый всегда во второмъ произведеніи отъ умноженія множимаго на десятки множителя, для сокращенія письма, можно вовсе не писать, ученики производятъ умноженіе въ задачѣ: „Сколько вѣсу въ 29 ведрахъ молока, если каждое ведро вѣситъ 31 фун.?“ такимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times\, 29 \\ \hline 279 \\ 62 \\ \hline 899 \end{array}$$

Послѣ достаточнаго числа упражненій въ умноженіи, при множителѣ двузначномъ, учащіеся нисколько не затруднятся при выводѣ простѣйшаго пріема умноженія на число трехзначное и многозначное. Придется только обратить вниманіе ихъ на упрощенные пріемы умноженія въ томъ случаѣ, когда въ срединѣ или въ концѣ множителя находятся нули, а также когда множимое или множимое и множитель оканчиваются однимъ или нѣсколькими нулями.

Результатомъ вычисленій съ отвлеченными числами и рѣшеній практическихъ задачъ на умноженіе должно явиться формулированное учениками правило, что *для умноженія многозначнаго числа на многозначное слѣдуетъ множимое множить на каждую цифру множителя, начиная съ единицъ и подписывая первую цифру каждаго частнаго произведенія подъ тою цифрою, на которую множатъ; потомъ сложить всѣ частныя произведенія. Если множитель оканчивается однимъ или нѣсколькими нулями, то слѣдуетъ умножить только на значущія цифры и къ полученному произведенію приписать съ правой стороны столько нулей, сколько ихъ было у множителя.*

Если же множимое и множитель оканчиваются нулями, то слѣдуетъ умножать числа, не обращая вниманія на нули, и къ полученному произведенію приписать съ правой стороны столько нулей, сколько ихъ было во множимомъ и множителѣ вмѣстѣ.

Задачи и численные примѣры на умноженіе расположены въ Сборникѣ слѣдующимъ образомъ:

1) Задачи отъ № 878 до № 885 и примѣры отъ № 447 до № 458. Умноженіе двузначнаго числа (сперва полныхъ десятковъ, а потомъ десятковъ и единицъ) на однозначное.

2) Задачи отъ № 885 до № 890 и примѣры отъ № 458 до № 464. Умноженіе трехзначнаго числа (сперва полныхъ сотенъ, потомъ

сотенъ и десятковъ и, наконецъ, сотенъ, десятковъ и единицъ) на однозначное.

3) Задачи отъ № 890 до № 893 и примѣры отъ № 464 до № 473. Умноженіе четырезначнаго числа на однозначное.

4) Задачи отъ № 893 до № 896 и примѣры подъ № 473. Умноженіе двузначнаго, трехзначнаго и четырезначнаго числа на 10, 100, 1000.

5) Задачи отъ № 896 до № 903 и примѣры подъ № 474. Умноженіе двузначнаго, трехзначнаго и четырезначнаго числа на нѣсколько полныхъ десятковъ и сотенъ.

6) Задачи отъ № 903 до № 908 и примѣры отъ № 475 до № 486. Умноженіе двузначнаго числа на двузначное.

7) Задачи отъ № 908 до № 911 и примѣры отъ № 486 до № 492. Умноженіе трехзначнаго числа на двузначное.

8) Задачи отъ № 911 до № 915 и примѣры отъ № 492 до № 500. Умноженіе четырезначнаго числа на двузначное.

9) Задачи отъ № 915 до № 918 и примѣры подъ № 500. Умноженіе трехзначнаго числа на трехзначное.

10) Задачи отъ № 918 до № 922 и примѣры отъ № 501 до № 503. Умноженіе четырезначнаго и пятизначнаго числа на трехзначное и четырезначное.

11) Задачи отъ № 922 до № 932 и примѣры отъ № 503 до № 509. Различные случаи умноженія. Задачи и примѣры, требующіе для своего рѣшенія употребленія дѣйствія умноженія нѣсколько разъ.

Дѣленіе.

Приступая къ выводу правила дѣленія отвлоченныхъ чиселъ, необходимо выяснить на небольшихъ частныхъ примѣрахъ, что, дѣля одно число на другое, мы ищемъ такое число, которое, будучи умножено на дѣлителя, дастъ дѣлимое. Такимъ способомъ обобщается двойное значеніе дѣленія въ приложеніи его къ рѣшенію практическихъ вопросовъ; именно: 1) раздѣленіе числа на равныя части и 2) опредѣленіе содержанія одного числа въ другомъ. Такое обобщеніе достигается повѣркою полученнаго отъ дѣленія результата.

Задача. (Изъ Сборника № 932). 300 саж. дровъ сложены на дворѣ въ 3 равныя клѣтки. Сколько саженъ дровъ въ каждой клѣткѣ?

Что мы должны сдѣлать для рѣшенія этой задачи? Должны 300 саж. раздѣлить на 3 равныя части. Сколько получимъ? 100 саж. Какъ это повѣрить? 100 саж., взятыя 3 раза, даютъ 300 саж.

Задача. (Изъ Сборника № 935). На каждаго солдата полагается въ мѣсяцъ 2 гарнца крупы. На прокормленіе сколькихъ солдатъ употреблено

въ продолженіи мѣсяца 4000 гар. крупы? Что нужно сдѣлать для рѣшенія этой задачи? Нужно узнать, сколько разъ 2 гар. заключаются въ 4000 гар., то-есть 4000 раздѣлить на 2. Получимъ, что 4000 гар. крупы употребили на прокормленіе 2000 солдатъ. Какъ это повѣрить? Если на одного солдата полагается въ мѣсяцъ 2 гар. крупы, то для 2000 солдатъ потребуется крупы въ 2000 разъ болѣе, а 2 гар., взятые 2000 разъ, даютъ 4000 гар.

Значитъ, какимъ свойствомъ отличается частное, получаемое отъ дѣленія одного числа на другое? Если частное умножить на дѣлителя, то должно получиться дѣлимое.

Итакъ, дѣля одно число на другое, какое число мы ищемъ? Такое число, которое, будучи умножено на дѣлителя, даетъ дѣлимое.

Дѣлимое 72, дѣлитель 8, какъ велико частное? (9).

Почему? Если 9 умножить на 8, то получимъ 72.

Послѣ такого разъясненія учащіеся приходятъ къ заключенію, что процессъ дѣленія числа на равныя части и опредѣленія содержанія одного числа въ другомъ одинъ и тотъ же, такъ какъ въ обоихъ случаяхъ рѣшеніе вопроса сводится на дѣленіе отвлеченныхъ чиселъ, то-есть на отысканіе такого числа, которое, будучи умножено на дѣлителя, даетъ дѣлимое.

Планъ упражненій: 1) дѣленіе трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное въ томъ случаѣ, когда каждый разрядъ дѣлимаго дѣлится безъ остатка на дѣлителя; 2) дѣленіе трехзначнаго и многозначнаго числа на однозначное въ томъ случаѣ, когда число, выражающее высшіе два разряда, дѣлится безъ остатка на дѣлителя; 3) дѣленіе на однозначнаго дѣлителя въ томъ случаѣ, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ дѣлимаго получаются остатки; 4) дѣленіе на 10 и на 100 числа, оканчивающагося нулями; 5) дѣленіе на дѣлителя двузначнаго въ томъ случаѣ, когда число, выражающее высшіе два разряда дѣлимаго, дѣлится безъ остатка на дѣлителя; 6) дѣленіе на двузначнаго дѣлителя въ томъ случаѣ, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ получаются остатки; 7) дѣленіе на трехзначнаго и многозначнаго дѣлителя.

1) *Задача.* (Изъ Сборника № 943). 633 доски употребили поровну на постройку трехъ сараевъ. Сколько досокъ пошло на постройку каждаго сарая?

Дѣля 6 сотенъ на 3, получимъ въ частномъ 2 сотни; отъ дѣленія трехъ десятковъ на 3 получится 1 десятокъ и, наконецъ, отъ дѣленія 3 единицъ на 3 получимъ 1 единицу; слѣдовательно, 633 : 3 = 211.

2) *Задача.* (Изъ Сборника № 949). Сколько нужно пудовъ бересты, чтобы получить 147 фун. дегтя, если 1 пудъ бересты даетъ 7 фун. дегтя?

Отъ дѣленія 1 сотни на 7 равныхъ частей въ частномъ не получится

ни одной сотни, а потому раздробляемъ 1 сотню въ десятки, получимъ 10 десятковъ, да еще 4 десятка, будетъ 14 десятковъ. Отъ дѣленія 14 десятковъ на 7 въ частномъ получится 2 десятка; отъ дѣленія 7 единицъ на 7 получимъ 1 единицу; слѣдовательно, 147 : 7=21.

3) *Задача.* (Изъ Сборника № 951). На фабрикѣ выдается рабочимъ 2046 руб. за каждые 6 дней работы. Какъ великъ ежедневный расходъ этой фабрики на рабочихъ?

Отъ дѣленія 20 сотенъ на 6 получится въ частномъ 3 сотни и въ остаткѣ 2 сотни, такъ какъ 3 сотни $\times$ 6 = 18 сотнямъ, а 20 сот.— 18 сот. = 2 сотнямъ. Раздробивъ 2 сотни въ десятки и придавъ 4 десятка, получимъ 24 десятка; отъ дѣленія 24 десятковъ на 6 получимъ 4 десятка и, наконецъ, отъ дѣленія 6 единицъ на 6 получается 1 единица; слѣдовательно, 2046 : 6 = 341.

4) *Задача.* (Изъ Сборника № 95.). Подрядчикъ обязался поставить сапоги съ условіемъ, чтобы за каждую пару ему заплатили 5 руб. Сколько паръ сапогъ поставилъ подрядчикъ, если за всю эту поставку получилъ 3375 руб.?

Письменное вычисленіе этого дѣленія располагается сначала такъ:

```
_33 сот.  7 дес.  5 един. | 5
 30 сот.                  |______________________
 ───────                   6 сот.  7 дес.  5 един.
   3 сот. = 30 дес.
          +  7 дес.
          ──────────
           _37 дес.
            35 дес.
          ──────────
             2 дес. = 20 един.
                    +  5 един.
                    ──────────
                     _25 един.
                      25 един.
                    ──────────
                       „
```

а потомъ и въ сокращенномъ видѣ:

```
  _3375 | 5
   30   |____
   ────   675
   _37
    35
   ────
    _25
     25
   ────
     „
```

5) *Задача.* (Изъ Сборника № 955). Въ 10 весеннихъ дняхъ считается 120 рабочихъ часовъ. Сколько рабочихъ часовъ въ одномъ весеннемъ днѣ?

120—все равно, что 12 десятковъ. Отъ дѣленія одного десятка на 10 получается 1 единица, то отъ дѣленія 12 десятковъ на 10 получится 12 единицъ.

6) *Задача.* (Изъ Сборника № 963). Садовникъ разложилъ 3200 яблокъ поровну въ 16 корзинокъ. Сколько яблокъ положилъ онъ въ каждую корзинку?

3200 = 32 сотнямъ. Отъ дѣленія 32 сотенъ на 16 получится въ частномъ 2 сотни; слѣдовательно, 3200 : 16 = 200.

7) *Задача.* (Изъ Сборника № 971). Во сколько минутъ приготовитъ машина 9472 гвоздя, если каждую минуту дѣлаетъ 37 гвоздей?

```
 _94 сот. 7 дес. 2 един.  | 37
  74 сот.                 |________________________
  ———————                   2 сот. 5 дес. 6 един.
  20 сот. = 200 дес.
             + 7 дес.
            ————————
           _207 дес.
            185 дес.
            ————————
             22 дес. = 220 един.
                        + 2 един.
                       ——————————
                       _222 един.
                        222 един.
                       ——————————
                          „ „ „
```

Сокращенно:

```
 _9472 | 37
  74   |____
  ————   256
 _207
  185
  ————
  _222
   222
  ————
  „ „ „
```

8) *Задача.* (Изъ Сборника № 976). Къ празднику Св. Пасхи раздѣлили 64125 руб. между 513 чиновниками поровну. Сколько рублей досталось каждому чиновнику?

```
 _64125 | 513
  513   |____
  —————   125
 _1282
  1026
  —————
  _2565
   2565
  —————
  „ „ „ „
```

Когда учащіеся достаточно хорошо усвоятъ механизмъ дѣленія, то-есть пріемъ отысканія цифры частнаго, имъ предлагаются задачи и примѣры для разъясненія частныхъ случаевъ, именно: когда въ частномъ приходится, при дѣленіи какого-либо разряда дѣлимаго, поставить нуль, когда дѣлитель оканчивается нулями, когда дѣлимое и дѣлитель оканчиваются нулями.

Результатомъ всѣхъ упражненій долженъ быть выводъ правила, что для дѣленія многозначнаго числа на многозначное должно: 1) *въ дѣлимомъ отдѣлить слѣва такое число, чтобы въ немъ заключался дѣлитель; узнать, сколько разъ дѣлитель заключается въ этомъ числѣ, и найденную цифру написать въ частномъ;* 2) *умножить дѣлителя на найденную цифру частнаго и полученное произведеніе вычесть изъ взятой части дѣлимаго;* 3) *къ остатку приписать слѣдующую цифру дѣлимаго; искать вторую цифру частнаго и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получится послѣдняя цифра частнаго.*

Задачи и численные примѣры на дѣленіе расположены въ Сборникѣ въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) Задачи отъ № 932 до № 946 и примѣры отъ № 509 до № 529—на дѣленіе трехзначнаго, четырезначнаго и пятизначнаго числа на однозначное, когда каждый разрядъ дѣлимаго дѣлится на дѣлителя.

2) Задачи отъ № 946 до № 951 и примѣры отъ № 529 до № 534—на дѣленіе трехзначнаго, четырезначнаго и пятизначнаго числа на однозначное, когда число, выражающее высшіе два разряда, дѣлится безъ остатка на дѣлителя.

3) Задачи отъ № 951 до № 955 и примѣры отъ № 534 до № 547 на дѣленіе трехзначнаго, четырезначнаго и пятизначнаго числа на однозначное, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ дѣлимаго получаются остатки.

4) Задачи отъ № 955 до № 958 и примѣры отъ № 547 до № 549 на дѣленіе чиселъ, оканчивающихся нулями, на 10, 100, 1000 и т. д. Въ указанныхъ примѣрахъ встрѣчается и дѣленіе съ остаткомъ.

5) Задачи отъ № 958 до № 962 и примѣры отъ № 549 до № 551 — дѣленіе трехзначныхъ, четырезначныхъ, пятизначныхъ и шестизначныхъ чиселъ, на мѣстѣ низшихъ разрядовъ которыхъ находятся нули, на двузначныя, трехъ и четырезначныя числа, у которыхъ на мѣстѣ только одного высшаго разряда находится значущая цифра.

6) Задачи отъ № 962 до № 965 и примѣры отъ № 551 до № 555 на дѣленіе трехъ—четырехъ—пятизначныхъ чиселъ на двузначное, когда

число, выражающее высшіе 2 разряда дѣлимаго, дѣлится безъ остатка на дѣлителя.

7) Задачи отъ № 965 до № 974 и примѣры отъ № 555 до № 568 на дѣленіе трехъ—четырехъ—пятизначныхъ чиселъ на двузначнаго дѣлителя въ томъ случаѣ, когда отъ дѣленія высшихъ разрядовъ получаются остатки.

8) Задачи отъ № 974 до № 988 и примѣры отъ № 568 до № 589 на дѣленіе многозначныхъ чиселъ на трехзначныя и многозначныя.

9) Задачи отъ № 988 до № 991, въ которыхъ, для опредѣленія искомаго, приходится употребить дѣйствіе дѣленіе нѣсколько разъ.

Для укрѣпленія учащихся въ механизмѣ четырехъ дѣйствій и въ быстротѣ вычисленій съ большими числами, имъ предлагаются задачи и численные примѣры, требующіе для рѣшенія нѣсколькихъ дѣйствій.

Такія задачи помѣщены въ первомъ отдѣлѣ первой части Сборника подъ заглавіемъ: „Задачи на всѣ 4 дѣйствія“, а примѣры—во второмъ отдѣлѣ того же Сборника подъ заглавіемъ: „Численные примѣры на всѣ 4 дѣйствія“.

Задачи расположены въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) Задачи отъ № 991 до № 995, рѣшаемыя *только* посредствомъ сложенія и вычитанія. 2) Задачи отъ № 995 до № 998 на сложеніе и умноженіе. 3) Задачи отъ № 998 до № 1000 на вычитаніе и умноженіе. 4) Задачи отъ № 1000 до № 1002 на сложеніе и дѣленіе. 5) Задачи отъ № 1002 до № 1006 на вычитаніе и дѣленіе. 6) Задачи отъ № 1006 до № 1012 на умноженіе и дѣленіе. 7) Задачи отъ № 1012 до № 1014 на сложеніе, вычитаніе и умноженіе. 8) Задачи отъ № 1014 до № 1016 на сложеніе, вычитаніе и дѣленіе. 9) Задачи отъ № 1016 до № 1019 на сложеніе, умноженіе и дѣленіе. 10) Задачи отъ № 1019 до № 1022 на вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. 11) При рѣшеніи задачъ отъ № 1022 до № 1026 нужно употребить по одному разу каждое изъ четырехъ дѣйствій.

Въ каждомъ же изъ этихъ 11 отдѣловъ задачи расположены по степени трудности рѣшенія и по мѣрѣ увеличенія числовыхъ данныхъ. Въ остальныхъ же задачахъ на 4 дѣйствія, отъ № 1026 до № 1091, числовыя данныя такъ подобраны, что одна и та же задача можетъ рѣшаться въ цѣлыхъ числахъ двумя, тремя и болѣе различными способами.

Численные примѣры расположены въ такомъ же порядкѣ, какъ и задачи, а именно: 1) Примѣры отъ № 589 до № 595 на сложеніе и вычитаніе. 2) Примѣры отъ № 595 до № 601 на сложеніе и умноженіе. 3) Примѣры отъ № 601 до № 607 на вычитаніе и умноженіе.

4) Примѣры отъ № 607 до № 611 на сложеніе и дѣленіе. 5) Примѣры отъ № 611 до № 616 на вычитаніе и дѣленіе. 6) Примѣры отъ № 616 до № 620 на умноженіе и дѣленіе. 7) Примѣры отъ № 620 до № 625 на сложеніе, вычитаніе и умноженіе. 8) Примѣры отъ № 625 до № 629 на сложеніе, вычитаніе и дѣленіе. 9) Примѣры отъ № 629 до № 633 на сложеніе, умноженіе и дѣленіе. 10) Примѣры отъ № 633 до № 637 на вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. 11) Въ каждомъ примѣрѣ отъ № 637 до № 647 встрѣчаются всѣ 4 дѣйствія.

Въ каждомъ же изъ этихъ 11 отдѣловъ примѣры расположены по степени увеличенія числа дѣйствій и возрастанія числовыхъ данныхъ.

За примѣрами на всѣ 4 дѣйствія, во второмъ отдѣлѣ Сборника, слѣдуютъ вопросы и примѣры для повѣрки четырехъ дѣйствій и опредѣленія зависимости результатовъ отъ измѣненія величины элементовъ дѣйствій. Самый порядокъ расположенія этихъ вопросовъ и примѣровъ служитъ достаточнымъ указаніемъ для учащихъ, какимъ образомъ довести учащихся до вывода относительно повѣрки каждаго изъ четырехъ дѣйствій и до опредѣленія зависимости величины результата каждаго дѣйствія отъ измѣненія величины элементовъ этого дѣйствія.

Письменное рѣшеніе задачъ.

Если ученики не имѣютъ въ рукахъ сборника задачъ, то, предлагая письменную задачу для рѣшенія въ классѣ, учитель выписываетъ на доску только одни данныя числа съ ихъ наименованіями. Для полнаго усвоенія задачи содержаніе ея воспроизводится по частнымъ вопросамъ, какъ это указано для задачи устной, и, наконецъ, повторяется въ цѣлости. Если же ученики имѣютъ сборникъ задачъ, то читаютъ задачу изъ сборника по указанному учителемъ нумеру и приступаютъ прямо къ рѣшенію задачи. Такъ какъ на рѣшеніи письменныхъ задачъ, кромѣ развитія соображенія ученика на раскрытіи плана рѣшенія, преслѣдуется пріученіе его къ аккуратному письменному расположенію и исполненію дѣйствій и вообще къ приложенію на практикѣ усвоенныхъ имъ правилъ, то въ случаѣ предложенія классу задачи, сложной по числу условій или замысловатой по содержанію, слѣдуетъ разграничить двѣ эти работы, то-есть установленіе плана рѣшенія и исполненіе дѣйствій. Безъ такого раздѣленія этихъ работъ часто случается, что слабѣйшіе ученики не могутъ приступить къ вычисленіямъ, и работа ведется въ классѣ такъ неравномѣрно, что учителю бываетъ весьма трудно слѣдить за ходомъ работы всего класса. Такимъ образомъ, послѣ усвоенія содержанія задачи учениками и прежде приступленія къ вычисленіямъ, учитель предлагаетъ классу высказать планъ рѣшенія задачи. Ученики говорятъ послѣдова-

тельно, какія неизвѣстныя величины они будутъ опредѣлять для отысканія главной неизвѣстной, потомъ уже называютъ одно за другимъ дѣйствія, необходимыя для рѣшенія задачи. Установивъ планъ рѣшенія задачи и намѣтивъ дѣйствія, ученики приступаютъ къ ихъ исполненію на своихъ доскахъ или тетрадяхъ. Задачи легкія по содержанію или повторительныя, то-есть сходныя по содержанію съ прежде рѣшенными, а также задачи, предлагаемыя для провѣрки развитія учениковъ, рѣшаются безъ предварительнаго установленія всѣмъ классомъ плана рѣшенія.

Къ класснымъ доскамъ вызываются ученики преимущественно слабѣйшіе въ классѣ, для того, чтобы они работали подъ непосредственнымъ наблюденіемъ учителя и повнимательнѣе относились къ самой работѣ исполняя ее въ виду всего класса. Отъ времени до времени слѣдуетъ вызывать къ классной доскѣ и способнѣйшихъ учениковъ, чтобы пріучить ихъ къ писанію большихъ цифръ мѣломъ и къ исполненію работъ передъ цѣлымъ классомъ.

Послѣ нѣсколькихъ минутъ, употребленныхъ учителемъ для обхода класса съ цѣлію посмотрѣть—всѣ ли ученики принялись за работу, онъ обращается къ слабѣйшимъ ученикамъ съ вопросами: что они узнаютъ, какое дѣйствіе дѣлаютъ, какой результатъ получили отъ исполненія такого-то дѣйствія и т. п. Вопросы эти необходимы для направленія работы всего класса и для указанія ошибокъ тѣмъ, которые съ перваго приступа повели рѣшеніе неправильно, а также и для тѣхъ, которые, не смотря на предшествовавшія указанія, вовсе не могутъ приступить къ работѣ. Вопросы обращаются къ слабѣйшимъ ученикамъ, чтобы въ случаѣ надобности воспроизвести съ ними по частямъ сдѣланное предварительно разсужденіе; иначе, послѣ отвѣта сильнѣйшихъ учениковъ, слабѣйшимъ оставалось бы только механически слѣдовать ихъ указаніямъ. Наблюдая за работающими у классныхъ досокъ, учитель исправляетъ ошибку тотчасъ, какъ замѣтитъ ее, чтобы не допустить ее пройти черезъ всѣ выкладки. Исправленіе это производится или просто указаніемъ на ошибку, или помощію вопроса, обращеннаго къ классу или къ отдѣльному ученику и относящагося къ результату или обозначенію, написанному, невѣрно.

Нужно заботиться, чтобы всѣ ученики доводили рѣшеніе задачи до конца, имѣя въ виду, что не такъ опасно въ дѣлѣ класснаго обученія нѣкоторое задержаніе развитія учениковъ успѣвающихъ, какъ упущеніе изъ виду неуспѣвающихъ.

По окончаніи рѣшенія задачи, одинъ изъ учениковъ, по выбору учителя, но безъ наводящихъ вопросовъ, повторяетъ содержаніе задачи, высказываетъ полное разсужденіе, ведущее къ опредѣленію, какое дѣйствіе необходимо для отысканія вспомогательной и главной неизвѣстной, и указываетъ вычисленія, которыя сдѣланы для полученія отвѣта на вопросъ задачи. При этомъ ему и всему классу прелагаются вопросы, касающіеся исполненія дѣйствій и вообще механизма вычисленій.

Весьма полезно также пріучить учениквъ послѣ окончанія всѣхъ дѣйствій, ведущихъ къ рѣшенію задачи, письменно приводить въ порядкѣ всѣ вычисленія посредствомъ *строчекъ*. Каждая строчка состоитъ изъ трехъ частей: въ первой части записывается словами, что ищется,

во второй обозначается дѣйствіе, посредствомъ котораго находится искомое, и въ третьей — результатъ, полученный отъ совершенія дѣйствій. Такое приведеніе всѣхъ разсужденій и вычисленій въ порядокъ пріучаетъ ученика схватывать въ своемъ соображеніи всю задачу въ цѣлости и относиться внимательно какъ къ условіямъ задачи, такъ и къ вычисленіямъ.

Изложенный въ общихъ чертахъ ходъ письменнаго рѣшенія задачи въ классѣ требуетъ въ началѣ, при работѣ съ непривычными учениками, много времени; но пріобрѣтаемыя учениками, по мѣрѣ упражненія, точность разсужденій и выраженій и быстрота вычисленій даютъ возможность не только сокращать время для рѣшенія задачи, но сокращать и самый процессъ. Для полноты выясненія важнаго вопроса относительно хода письменнаго рѣшенія задачи въ классѣ привожу образецъ этой работы.

Возьмемъ задачу изъ Сборника № 1024. У мастера было 1443 арш. тонкой проволоки; изъ всей этой проволоки онъ сдѣлалъ клѣтки, сѣтки и спицы; на клѣтки онъ употребилъ 37-ую часть всей проволоки, а на сѣтки въ 17 разъ болѣе, чѣмъ на клѣтки. Сколько аршинъ проволоки пошло на приготовленіе спицъ?

Усвоеніе содержанія задачи. Задача, прочитанная учителемъ или учениками изъ Сборника, повторяется однимъ ученикомъ. Слабѣйшіе или менѣе внимательные ученики отвѣчаютъ на вопросы учителя: что означаетъ въ задачѣ 1443 арш., 37, 17? Что ищется въ задачѣ? Что извѣстно изъ задачи? и т. п. Послѣ усвоенія содержанія задачи по частямъ, она снова повторяется однимъ ученикомъ въ цѣлости.

Планъ рѣшенія, высказанный однимъ ученикомъ въ цѣлости или нѣсколькими учениками по частямъ. Сначала надо узнать, сколько проволоки употребилъ мастеръ на клѣтки, потомъ на сѣтки, затѣмъ на клѣтки и сѣтки вмѣстѣ и, наконецъ, сколько пошло проволоки на приготовленіе спицъ.

Другой пріемъ:

Требуется узнать, сколько проволоки пошло на приготовленіе спицъ; для этого нужно узнать, сколько проволоки употребилъ мастеръ на клѣтки и сѣтки вмѣстѣ, а такъ какъ изъ задачи видно, что на сѣтки пошло проволоки въ 17 разъ болѣе, чѣмъ на клѣтки, то мы прежде всего должны узнать, сколько проволоки употребилъ мастеръ на приготовленіе клѣтокъ. Итакъ надо прежде вычислить, сколько проволоки пошло на приготовленіе клѣтокъ и т. д.

Выдѣленіе дѣйствій. На вопросы учителя, какія дѣйствія нужно совершить для рѣшенія этой задачи и почему именно такія дѣйствія, ученики отвѣчаютъ: «для рѣшенія этой задачи нужно, во 1) раздѣлить 1443 арш. на 37, потому что на клѣтки мастеръ употребилъ 37-ую часть всей проволоки, а для опредѣленія одной изъ равныхъ частей числа нужно его раздѣлить на число частей. 2) Умножить полученное число на 17, потому что на сѣтки пошло проволоки въ 17 разъ болѣе, чѣмъ на клѣтки, а чтобы число увеличить въ 17 разъ, нужно сдѣлать умноженіе. 3) Сложить числа, полученныя отъ дѣленія и умноженія, чтобы узнать, сколько проволоки пошло на клѣтки и сѣтки. 4) Полу-

ченную сумму вычесть изъ 1443 арш., такъ какъ на клѣтки, сѣтки и спицы пошло 1443 арш., а для того, чтобы узнать, сколько проволоки пошло на спицы, нужно отъ всего числа аршинъ проволоки отнять то число аршинъ проволоки, которое употребилъ мастеръ на клѣтки и сѣтки.»

Полезно предложить одному ученику, послѣ выдѣленія дѣйствій, перечислить въ порядкѣ всѣ дѣйствія, необходимыя для рѣшенія задачи, и отвѣтить на вопросы, для опредѣленія какой неизвѣстной служитъ то или другое дѣйствіе.

Вычисленіе.

```
 1443 | 37          39        39
-111  |----      × 17      +663
----- | 39       -----     -----
  333             273       702
 -333             39
-----           -----
  »»»             663

        1443
       - 702
       -----
         741
```

Строчки.

На клѣтки пошло проволоки	1443 арш. : 37	= 39 арш.
На сѣтки » »	39 арш. × 17	= 663 арш.
На клѣтки и сѣтки вмѣстѣ	39 арш. + 663 арш.	= 702 арш.
На спицы пошло проволоки	1443 арш. — 702 арш.	= 741 арш.

Послѣ всѣхъ вычисленій, необходимыхъ для рѣшенія задачи, ученики пишутъ *строчки*, то-есть выписываютъ вкратцѣ планъ рѣшенія задачи, намѣчаютъ дѣйствія, произведенныя для опредѣленія той или другой неизвѣстной, и пишутъ самый результатъ. Такимъ образомъ каждая строчка должна состоять изъ трехъ частей: а) какая неизвѣстная опредѣлялась—эта часть записывается словами, б) какое дѣйствіе совершено для опредѣленія неизвѣстной и в) какой получился результатъ отъ совершенія дѣйствія. Число строчекъ зависитъ отъ числа простыхъ задачъ, на которыя разбивается данная сложная задача, значитъ—отъ числа всѣхъ неизвѣстныхъ, главныхъ и вспомогательныхъ, которыя нужно опредѣлить. Когда ученикъ правильно написалъ строчки послѣ рѣшенія задачи, то тѣмъ онъ показалъ полнѣйшее пониманіе всего хода вычисленій и обнаружилъ точность и послѣдовательность своего разсужденія при рѣшеніи задачи.

Письменныя задачи для рѣшенія внѣ класса. Задачи, предлагаемыя ученикамъ для рѣшенія внѣ класса, имѣютъ преимущественную цѣль повтореніе пройденнаго въ классѣ, а потому не должны отличаться особенною замысловатостію, могущею сильно затруднить ученика, а должны походить содержаніемъ своимъ на задачи, рѣшенныя въ классѣ, и могутъ заключать данныя числа въ большихъ размѣрахъ, такъ какъ ученики могутъ располагать временемъ достаточнымъ для вычисленій съ большими числами. Съ этою цѣлью въ моемъ «Сборникѣ» весьма часто встрѣчаются *письменныя* задачи, стоящія рядомъ по двѣ, однообразнаго содер-

жанія и отличающіяся только данными числами и ихъ наименованіями. Задача, подобная продѣланной въ классѣ, даетъ возможность и слабѣйшимъ ученикамъ выполнить внѣклассную работу самостоятельно и предупреждаетъ распространеніе между учениками дурной привычки—непроизводительнаго списыванія чужой работы.

При нѣкоторой опытности учителя можно при задаваніи внѣклассной работы раздѣлять учениковъ по успѣхамъ и способностямъ на группы, предлагая каждой групѣ изъ Сборника особенную задачу.

Задача (изъ Сборника № 1020), записанная въ тетради ученика. Изъ Москвы и Якутска выѣхали, въ одно и то же время, 2 путешественника и встрѣтились черезъ 35 дней; путешественникъ, ѣхавшій изъ Москвы, дѣлалъ ежедневно по 136 вер. По скольку верстъ проѣзжалъ ежедневно путешественникъ, выѣхавшій изъ Якутска? (Отъ Москвы до Якутска 7945 вер.)

Вычисленіе.

136	7945	3185	35
× 35	− 4760	− 315	91
680	3185	35	
408		− 35	
4760		„ „	

Строчки.

От Москвы до мѣста встрѣчи 136×35=4760 верстъ.

Отъ Якутска „ „ „ 7945—4760=3185 верстъ.

Путешественникъ, выѣхавшій изъ Якутска, проѣзжалъ въ день 3185 : 35 = 91 вер.

Попутно на рѣшеніи задачъ и вычисленіи примѣровъ производится повтореніе опредѣленія дѣйствій, ихъ элементовъ и результатовъ, а также повтореніе повѣрки всѣхъ четырехъ дѣйствій, какъ на отвлеченныхъ примѣрахъ, такъ и посредствомъ составленія учениками задачъ, служащихъ для повѣрки задачъ, рѣшенныхъ ими.

Главнѣйшіе вопросы, на которые ученики должны точно и опредѣленно отвѣчать въ концѣ этого курса:

Въ какихъ случаяхъ нужно числа складывать, вычитать, множить, дѣлить?

Какъ производить съ числами сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе?

Какъ повѣрить результатъ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія?

Отъ какихъ измѣненій элементовъ дѣйствій результаты ихъ увеличиваются, уменьшаются, не измѣняются?

Дѣйствія съ составными именованными числами.

Такъ какъ на основаніи знакомства съ составными именованными числами при изученіи чиселъ первой сотни въ курсѣ втораго года ученики вообще научились съ ними обращаться, а на основаніи усвоенія правилъ для дѣйствія съ большими числами могутъ примѣнить тѣ же правила къ числамъ именованнымъ, то, слѣдовательно, дѣйствія съ этими числами могутъ служить только для повторенія курса, пройденнаго во вторую половину втораго года и въ первую половину третьяго.

Повтореніе это производится на вычисленіи примѣровъ и рѣшеніи задачъ на составныя именованныя числа.

Задачи приведены въ первой части Сборника въ отдѣлѣ составныхъ именованныхъ чиселъ подъ заглавіемъ: 1) задачи на сложеніе, 2) на вычитаніе, 3) на вычисленіе времени, 4) на умноженіе, 5) на дѣленіе и 6) на всѣ 4 дѣйствія. Численные же примѣры помѣщены во второмъ отдѣлѣ того же Сборника подъ заглавіемъ: 1) численные примѣры на раздробленіе и превращеніе, 2) на сложеніе, 3) на вычитаніе, 4) на умноженіе, 5) на дѣленіе и 6) на всѣ 4 дѣйствія.

Привожу здѣсь только образцы рѣшенія задачъ, такъ какъ всѣ другія упражненія разъясненій вовсе не требуютъ.

Задача. (Изъ Сборника № 1267). Подрядчикъ взялся починить дорогу на разстояніи 10 верстъ въ 3 дня; въ первый день онъ поставилъ на работу 84 работника, и каждый работникъ починилъ участокъ длиною въ 12 саж. 2 арш., а во второй день работали только 76 человѣкъ, и каждый работникъ починилъ участокъ длиною въ 25 саж. 1 арш. На какомъ разстояніи осталось еще починить дорогу?

Вычисленіе.

```
   12 саж.   2 арш.
        × 84
 ─────────────────
   48 саж.   168 арш.
  96
 ─────────────────
 1064 саж.          = 2 вер.  64 саж.

   25 саж.   1 арш.
        × 76
 ─────────────────
  150 саж. 76 арш.
 175
 ─────────────────
 1925 саж.  1 арш. = 3 вер. 425 саж. 1 арш.
```

+ 2 вер. 64 саж.	− 10 вер.
3 вер. 425 саж. 1 арш.	5 вер. 489 саж. 1 арш.
5 вер. 489 саж. 1 арш.	4 вер. 10 саж. 2 арш.

Строчки.

84 работника починили участокъ длиною въ (12 саж. 2 арш.) × 84 = = 2 вер. 64 саж.

76 работниковъ починили участокъ длиною въ (25 саж. 1 арш.) × 76 = = 3 вер. 425 саж. 1 арш.

Въ 2 дня работники починили участокъ длиною въ (2 вер. 64 саж.) + + (3 вер. 425 саж. 1 арш.) = 5 вер. 489 саж. 1 арш.

Осталось еще починить дорогу на разстоянiи 10 вер. — (5 вер. 489 саж. 1 арш.) = 4 вер. 10 саж. 2 арш.

Задача. (Изъ Сборника № 1226). Мастеръ купилъ 3 фун. 10 лот. 2 зол. серебра и изъ всего этого серебра сдѣлалъ подсвѣчники; на каждый подсвѣчникъ онъ употребилъ 10 лот. 2 зол. серебра и продалъ каждый подсвѣчникъ по 14 руб. 50 коп. Сколько денегъ получилъ онъ за всѣ подсвѣчники?

Вычисленiе.

3 фун. 10 лот. 2 зол. = 320 зол.

10 лот. 2 зол. = 32 зол.

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 32 \\ \hline 96 \\ +10 \\ \hline 106 \\ \times 3 \\ \hline 318 \\ +2 \\ \hline 320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \times 3 \\ \hline 30 \\ +2 \\ \hline 32 \end{array}$$

320 : 32 = 10

$$\begin{array}{r} 1450 \\ \times\ 10 \\ \hline 14500 \end{array}$$

Строчки.

Подсвѣчниковъ вышло (3 фун. 10 лот. 2 зол.) : (10 лот. 2 зол.) = = 10.

Мастеръ получилъ за подсвѣчники (14 руб. 50 коп.) × 10 = = 145 руб.

Изъ задачъ, данныя которыхъ составныя именов. числа, нѣкоторую особенность представляютъ задачи, относящіяся къ вычисленію времени. Считаю не лишнимъ изложить вкратцѣ содержаніе и порядокъ классной работы при рѣшеніи задачъ этого рода.

Прежде предложенія ученикамъ самой задачи, учитель подготовляетъ учениковъ къ вычисленію времени посредствомъ частныхъ вопросовъ, которые я привожу изъ урока, происходившаго въ 1872 году 27-го сентября, въ 10-мъ часу утра:

„Скажите, который теперь часъ? Десятый.

„Откуда считается начало сутокъ? Съ полуночи, отъ 12 часовъ.

„Какъ же понимать, что теперь десятый часъ сутокъ? Это означаетъ, что отъ начала сутокъ прошло полныхъ 9 часовъ и теперь идетъ десятый часъ.

„Какой теперь мѣсяцъ и которое сегодня число? Сегодня 27-ое число сентября мѣсяца.

„Какъ это понимать, что сегодня 27-ое число сентября? Это означаетъ, что отъ начала мѣсяца сентября прошло уже 26 сутокъ и теперь наступили 27-ыя сутки.

„А который по счету въ году мѣсяцъ сентябрь? Девятый.

„Скажите теперь, сколько же времени прошло отъ начала нынѣшняго года до настоящаго часа? 8 мѣсяцевъ 26 сутокъ и 9 часовъ.

„Который теперь годъ? 1872-ой.

„Откуда мы считаемъ 1872-й годъ? Отъ Рождества Спасителя Іисуса Христа.

„Сколько же времени прошло отъ Р. Хр. до настоящаго часа? 1871 годъ 8 мѣс. 26 сут. 9 часовъ.

„А если считать время только въ годахъ, суткахъ и часахъ, то сколько времени прошло отъ Р. Хр. до настоящаго часа? Теперь идетъ 1872-ой годъ, слѣдовательно отъ Р. Хр. прошло полныхъ 1871 годъ; изъ 1872-го года прошло 8 мѣсяцевъ и, такъ какъ это годъ високосный, то, значитъ, прошло: въ январѣ 31 сутки, въ февралѣ 29, въ мартѣ 31, въ апрѣлѣ 30, въ маѣ 31, въ іюнѣ 30, въ іюлѣ 31 и въ августѣ 31, а всего въ 8 мѣсяцевъ 244 сут., да еще изъ девятаго мѣсяца сентября прошло 26 сутокъ и 9 часовъ, значитъ всего отъ Р. Хр. до настоящаго часа прошло: 1871 годъ 270 сутокъ и 9 часовъ.

„Слѣдовательно, какъ вы понимаете, когда говорятъ, что Императоръ Петръ Великій родился 30-го мая 1672-го года? Это означаетъ, что до того дня, когда родился Императоръ Петръ Великій, прошло отъ Р. Хр. (то-есть отъ начала лѣтосчисленія) 1671 годъ 4 мѣс. 29 сут.,

или 1671 годъ и 150 сутокъ (1672-ой годъ былъ високосный, слѣдовательно въ февралѣ считалось 29 сутокъ).

„Скажите теперь, какого числа и въ которомъ году Петръ Великій разбилъ Шведовъ подъ Полтавой, если извѣстно, что отъ Р. Хр. до того дня прошло 1708 лѣтъ 177 сутокъ? Такъ какъ отъ Р. Хр. прошло полныхъ 1708 лѣтъ, значитъ тогда шелъ 1709-й годъ; изъ этого года прошло 177 сутокъ, и такъ какъ это былъ годъ простой, то, выдѣляя изъ 177 сутокъ 31 сутки для января, 28 для февраля, 31 для марта, 30 для апрѣля и 31 для мая, получимъ, что изъ 1709 года прошло полныхъ 5 мѣсяцевъ и 26 сутокъ, значитъ шло 27-е число шестаго мѣсяца, то-есть іюня. Итакъ, побѣда совершилась 27-го іюня 1709-го года.“

Послѣ сознательнаго и безошибочнаго рѣшенія учащимися подобныхъ вопросовъ можно перейти къ рѣшенію задачъ. Большинство нумеровъ задачъ, помѣщенныхъ на вычисленіе времени въ 1-й части Сборника (12-е изданіе), въ отдѣлѣ задачъ на составныя именованныя числа, заключаютъ въ себѣ по нѣскольку задачъ, то-есть по нѣскольку данныхъ чиселъ въ самой задачѣ и въ вопросѣ. При рѣшеніи такихъ задачъ можно поступать двояко: 1) или учитель выбираетъ изъ задачи по одному данному числу изъ заданія и вопроса и даетъ учащимся рѣшать одну простую задачу; 2) или учащіеся рѣшаютъ всю сложную задачу, связывая каждое изъ чиселъ данныхъ въ заданіи съ каждымъ изъ чиселъ данныхъ въ вопросѣ. Такимъ образомъ, при второмъ пріемѣ пользованія задачею, задача напримѣръ № 1135 разбивается на 9 простыхъ задачъ. Кромѣ того, всѣ задачи распредѣлены на три группы. Въ одной группѣ по данному времени, въ которое совершилось предшествовавшее событіе, и по количеству времени, прошедшаго до послѣдующаго событія, опредѣляется время, *когда* совершилось это послѣднее событіе. Такія задачи рѣшаются сложеніемъ и сумма вычисляется въ годахъ, мѣсяцахъ, суткахъ и т. д. Въ другой группѣ, наоборотъ, по данному времени, когда совершилось послѣдующее событіе, и по количеству времени, истекшаго до этого событія отъ событія предшествовавшаго, опредѣляется время совершенія предшествовавшаго событія. Такія задачи рѣшаются вычитаніемъ и разность вычисляется въ годахъ, мѣсяцахъ, суткахъ, часахъ и т. д.; здѣсь приходится принимать въ разсчетъ число сутокъ въ каждомъ мѣсяцѣ, иначе можетъ произойти ошибка въ результатѣ вычисленія въ нѣсколько сутокъ. Наконецъ, въ третьей группѣ, или по данному времени, когда совершилось предшествующее и послѣдующее событія, опредѣляется, сколько времени прошло отъ совершенія одного событія до совершенія другаго; или, наконецъ, входятъ задачи сложныя, въ которыхъ требуется опредѣ-

лять и время, когда событіе совершилось, и количество времени, протекшаго отъ одного событія до другаго. Для рѣшенія послѣднихъ задачъ потребуется и сложеніе, и вычитаніе.

Привожу рѣшеніе одной задачи изъ каждой группы.

Задача. Мальчикъ родился 1847 года 5-го апрѣля въ 5 часовъ утра. Когда умеръ этотъ мальчикъ, если онъ жилъ 7 лѣтъ 6 мѣсяцевъ 12 дней? (Изъ № 1137 подъ буквою *в*).

Отъ Р. Хр. до дня рожденія мальчика прошло: 1846 лѣтъ 3 мѣсяца 4 сутокъ 5 часовъ. Чтобы опредѣлить, сколько времени прошло отъ Р. Хр. до смерти мальчика, придадимъ къ этому числу 7 лѣтъ 6 мѣсяцевъ 12 дней.

+	1846 л.	3 мѣс.	4 сут.	5 час.
	7 „	6 „	12 „	
получимъ	1853 г.	9 мѣс.	16 сут.	5 час.

Значитъ, мальчикъ умеръ въ 1854 году 17-го октября въ 5 часовъ утра.

Задача. Женщина умерла 9-го іюля 1870 года въ 3 часа 19 минутъ пополудни. Когда родилась эта женщина, если она прожила 56 лѣтъ 11 мѣс. 20 дней 10 час. 20 мин.? (Изъ № 1143 подъ буквою *в*).

Отъ Рождества Христова до дня смерти женщины прошло 1869 лѣтъ 6 мѣсяцевъ 8 сутокъ 15 часовъ 19 минутъ. Чтобы опредѣлить, сколько времени прошло отъ Р. Хр. до рожденія этой женщины, нужно изъ 1869 лѣтъ 6 мѣс. 8 сут. 15 час. 19 мин. вычесть 56 лѣтъ 11 мѣс. 20 сут. 10 час. 20 мин.

−	1869 лѣтъ	6 мѣс.	8 сут.	15 час.	19 мин.
	56 „	11 „	20 „	10 „	20 „
	1812 лѣтъ	6 мѣс.	18 сут.	4 часа	59 мин.

Значитъ, женщина родилась 19-го іюля 1813-го года въ 4 часа 59 мин. утра.

(*Примѣчаніе.* Изъ 8 сутокъ нельзя вычесть 20 сутокъ; занимаемъ шестой (іюнь) мѣсяцъ, обращаемъ его въ сутки; получаемъ 30 сутокъ, да еще 8 сутокъ, составится 38 сутокъ.)

Задача. Постройку дома окончили 31-го іюля 1849 года въ 2 часа пополудни. Сколько времени простоялъ этотъ домъ, если онъ сгорѣлъ 30-го сентября 1868 года въ 1 часъ 17 минутъ пополудни? (Изъ № 1140).

Отъ Р. Хр. до пожара прошло 1867 лѣтъ 273 сут. 13 часовъ 17 мин., а до окончанія постройки дома 1848 лѣтъ 211 сут. 14 часовъ. Для рѣшенія задачи изъ перваго числа надо вычесть второе:

	1867 лѣтъ	273 сут.	13 час.	17 мин.
−	1848 „	211 „	14 „	— „
и получимъ	19 лѣтъ	61 сут.	23 часа	17 мин.

Задачи и численные примѣры на составныя именованныя числа расположены въ Сборникѣ слѣдующимъ образомъ:

1) Раздробленіе и превращеніе.

а) Раздробленіе.

1) Примѣры отъ № 707 до № 713 на мѣры монетъ.
2) Примѣры отъ № 713 до № 718 на мѣры сыпучихъ тѣлъ.
3) Примѣры отъ № 718 до № 726 на мѣры жидкихъ тѣлъ.
4) Примѣры отъ № 726 до № 740 на мѣры длины.
5) Примѣры отъ № 740 до № 750 на мѣры вѣса.
6) Примѣры отъ № 750 до № 758 на мѣры времени.
7) Примѣры отъ № 758 до № 762 на мѣры бумаги.
8) Примѣры отъ № 762 до № 770 на мѣры аптекарскаго вѣса.
9) Примѣры отъ № 770 до № 786 на мѣры квадратныя.
10) Примѣры отъ № 786 до № 796 на мѣры кубическія.

Примѣры, относящіеся къ каждой мѣрѣ, постоянно усложняются и содержатъ въ себѣ всѣ различныя единичныя отношенія самой мѣры.

б) Превращеніе.

1) Примѣры отъ № 796 до № 806 на мѣры монетъ.
2) Примѣры отъ № 806 до № 819 на мѣры длины.
3) Примѣры отъ № 819 до № 822 на мѣры сыпучихъ тѣлъ.
4) Примѣры отъ № 822 до № 831 на мѣры жидкихъ тѣлъ.
5) Примѣры отъ № 831 до № 842 на мѣры вѣса.
6) Примѣры отъ № 842 до № 850 на мѣры времени.
7) Примѣры отъ № 850 до № 853 на мѣры бумаги.
8) Примѣры отъ № 853 до № 860 на мѣры аптекарскаго вѣса.
9) Примѣры отъ № 860 до № 876 на мѣры квадратныя.
10) Примѣры отъ № 876 до № 885 на мѣры кубическія.

Примѣры, относящіеся къ каждой мѣрѣ, постоянно усложняются; такъ превращается сперва простое именованное число въ

простое, потомъ простое въ составное и, наконецъ, составное именованное число въ составное.

2) Сложенiе.

1) Задачи отъ № 1091 до № 1102 и численные примѣры отъ № 885 до № 894 на сложенiе двухъ слагаемыхъ.

2) Задачи отъ № 1102 до № 1115 и примѣры отъ № 894 до № 903 на сложенiе трехъ и многихъ слагаемыхъ.

3) Вычитанiе.

1) Задачи отъ № 1115 до № 1130 и примѣры отъ № 903 до № 928, гдѣ дѣйствiе вычитанiе приходится употребить по одному разу.

2) Задачи отъ № 1130 до № 1135, для рѣшенiя которыхъ дѣйствiе вычитанiе нужно употребить два и болѣе разъ.

4) Вычисленiе времени.

1) Задачи №№ 1135, 1136, 1137, 1144, въ которыхъ по извѣстному началу событiя и по его продолжительности отыскивается конецъ.

2) Задачи №№ 1138, 1139, 1140, 1146, въ которыхъ по извѣстному началу и концу событiя требуется опредѣлить его продолжительность.

3) Задачи №№ 1141, 1142, 1143, въ которыхъ по извѣстному концу и продолжительности событiя нужно найти его начало.

4) Задачи №№ 1145, 1147, 1148, 1149, 1150, требующiя для своего рѣшенiя уже нѣсколькихъ дѣйствiй вслѣдствiе сложности условiй.

5) Умноженiе.

1) Задачи отъ № 1151 до № 1158 и примѣры отъ № 928 до № 938—умноженiе составнаго именованнаго числа, выраженнаго двумя наименованiями, на отвлеченное.

2) Задачи отъ № 1158 до № 1161 и примѣры отъ № 938 до № 945—умноженiе составнаго именованнаго числа, выраженнаго тремя наименованiями, на отвлеченное.

3) Задачи отъ № 1161 до № 1166 и примѣры отъ № 945 до № 949—умноженiе составнаго именованнаго числа, выраженнаго четырьмя или пятью наименованiями, на отвлеченное.

4) Задачи отъ № 1166 до № 1168 и примѣры отъ № 949 до № 955—умноженіе составнаго именованнаго числа, въ которомъ одно или два наименованій выпущены, на отвлеченное.

5) Задачи отъ № 1168 до № 1179, въ которыхъ дѣйствіе умноженіе нужно употребить два и болѣе разъ.

6) Дѣленіе.

1) Задачи отъ № 1179 до № 1191 и примѣры отъ № 955 до № 972, въ которыхъ дѣлителемъ дано число отвлеченное.

2) Задачи отъ № 1191 до № 1209 и примѣры отъ № 972 до № 998, въ которыхъ дѣлитель—число именованное.

3) Задачи отъ № 1209 до № 1212, для рѣшенія которыхъ дѣйствіе дѣленіе нужно употребить нѣсколько разъ.

7) Всѣ 4 дѣйствія.

а) Задачи.

1) Задачи отъ № 1212 до № 1214 рѣшаются *только* посредствомъ сложенія и вычитанія.

2) Задачи отъ № 1214 до № 1216 даны на сложеніе и умноженіе.

3) Задачи отъ № 1216 до № 1218—на вычитаніе и умноженіе.

4) Задачи отъ № 1218 до № 1220—на сложеніе и дѣленіе.

5) Задачи отъ № 1220 до № 1223—на вычитаніе и дѣленіе.

6) Задачи отъ № 1223 до № 1230—на умноженіе и дѣленіе.

7) Задачи отъ № 1230 до № 1232—на сложеніе, вычитаніе и умноженіе.

8) Задачи отъ № 1232 до № 1234—на сложеніе, вычитаніе и дѣленіе.

9) Задача подъ № 1234 на сложеніе, умноженіе и дѣленіе.

10) Задачи отъ № 1235 до № 1241—на вычитаніе, умноженіе и дѣленіе.

11) Задачи отъ № 1241 до № 1243, для рѣшенія которыхъ нужно употребить по одному разу каждое изъ четырехъ дѣйствій.

12) Задачи же отъ № 4243 до № 1313 расположены по степени трудности рѣшенія и притомъ числовыя данныя въ нихъ такъ подобраны, что одна и та же задача можетъ рѣшаться въ цѣлыхъ числахъ двумя, тремя и болѣе различными способами.

б) Численные примѣры отъ № 998.

Квадратныя мѣры.

При объясненіи ученикамъ квадратныхъ мѣръ и пріема измѣренія площади прямоугольника хорошимъ пособіемъ служитъ *квадратная доска* съ ребромъ въ одинъ футъ, съ одной стороны имѣющая гладкую поверхность, а съ другой разграфленная на 144 квадратныхъ дюймовъ; для той же цѣли могутъ служить также тѣ приспособленія въ ариѳметическомъ ящикѣ, о которыхъ сказано мною при описаніи этого пособія.

Прежде нежели приступить къ употребленію нагляднаго пособія, нужно познакомить учениковъ съ самою сущностью измѣренія; имъ предлагаются вопросы: „Чѣмъ измѣряется разстояніе одного предмета отъ другаго? Какія извѣстны вамъ мѣры длины? Какъ саженью измѣрить длину комнаты, длину двора? Чѣмъ измѣряется тяжесть предметовъ, количество воды, песку, количество бумаги, время?“ и т. п. Итакъ, длина измѣряется опредѣленною единицею длины, вѣсъ—опредѣленною единицею вѣса, время—опредѣленною единицею времени и т. д. „Отъ чего зависитъ величина поля, стѣны, пола, двери?“ и т. п. (отъ длины и ширины).

Чѣмъ можно измѣрить величину пола? Опредѣленною единицею площади.

Если бы у насъ была такая единица подъ руками, то какъ мы измѣрили бы полъ?

Укладывали бы ее на полу, чтобы узнать, сколько разъ она помѣстится въ площади пола.

Какимъ образомъ надо укладывать эту площадь на площади пола? По длинѣ и по ширинѣ пола; сначала уложить ее около стѣны по длинѣ пола столько разъ, сколько помѣстится, получится первый рядъ; потомъ измѣрить, сколько разъ помѣстится эта единица мѣры по ширинѣ пола, столько и будетъ рядовъ, а зная число рядовъ и сколько разъ заключается единица въ каждомъ ряду, можно узнать, сколько разъ она помѣщается во всей площади пола.

Замѣтьте, что такія единицы мѣры, которыя служатъ для измѣренія площадей, называются *квадратными мѣрами.* Вотъ одна изъ такихъ мѣръ. (Учитель показываетъ доску въ квадратный футъ.)

Сколько доска эта имѣетъ въ длину и ширину? Одинъ футъ. (Въ случаѣ затрудненія учениковъ ребро доски измѣряется футомъ.)

Такая мѣра называется *квадратнымъ футомъ.*

Какія еще могутъ быть квадратныя мѣры? Квадратный аршинъ, квадрат. сажень, квадр. вершокъ, квадр. дюймъ.

Учитель чертитъ на доскѣ квадратный футъ и ромбъ, имѣющій сторону въ одинъ футъ. Можно ли эту площадь (ромбъ) назвать квадратнымъ футомъ? Нельзя, потому что хотя его стороны и равны между собою, но углы не равны, а въ квадратномъ футѣ стороны равны между собою и углы равны.

Начертите квадратный вершокъ, квадратный дюймъ.

Сколько сторонъ имѣютъ начерченныя вами фигуры? Сколько угловъ? Что можно сказать о величинѣ всѣхъ четырехъ сторонъ нашихъ фигуръ? О величинѣ угловъ? Какъ эти фигуры можно назвать по числу угловъ? (Четыреугольники.) Такіе четыреугольники называются *квадратами*. Начертите четыреугольники, которые нельзя назвать квадратами. Начертите такой четыреугольникъ, у котораго всѣ углы были бы равны между собою, а стороны не равны. (Прямоугольникъ.) Начертите такой четыреугольникъ, у котораго стороны были бы равны между собою, а углы не равны.

Скажите теперь, что называется квадратомъ? Квадратомъ называется четыреугольникъ, у котораго всѣ стороны равны и всѣ углы равны между собою.

Что называется квадратнымъ футомъ? Такой квадратъ, у котораго каждая сторона равна одному футу.

Что называется квадратною саженью, квадратнымъ аршиномъ? и т. д.

Вотъ доска въ квадратный футъ. Какъ узнать, сколько въ ней квадратныхъ дюймовъ? Нужно ли для этого имѣть квадратный дюймъ?

Учитель поворачиваетъ къ ученикамъ ту сторону доски, которая разграфлена на квадратные дюймы.

Какъ сосчитать, сколько въ площади этой доски квадратныхъ дюймовъ? По длинѣ доски помѣщается 12 квадратныхъ дюймовъ, а по ширинѣ такихъ рядовъ 12, значитъ, въ площади доски заключается 12 разъ по 12 квадр. дюймовъ, то-есть 144 квадр. дюйма.

Сколько квадратныхъ аршинъ въ квадратной сажени, квадратныхъ футовъ въ квадратной сажени?

Какъ теперь узнать, сколько квадратныхъ футовъ въ площади нашей классной доски? Нужно измѣрить длину и ширину доски футомъ и полученныя числа перемножить.

Сколько квадратныхъ саженъ заключаетъ поле, длина котораго 20 саж., а ширина 12 саженъ? 240 квадр. саженъ, потому что по длинѣ квадр. сажень укладывается 20 разъ, а по ширинѣ такихъ рядовъ, по 20 квадр. саженъ, будетъ 12; значитъ, чтобы узнать, сколько въ площади поля будетъ квадратныхъ саженъ, нужно 20 умножить на 12, и получится 240 квадр. саженъ.

Напишите на вашихъ доскахъ таблицу квадратныхъ мѣръ такъ, какъ пишутся обыкновенно таблицы всякихъ мѣръ.

(Ученики сами составляютъ таблицу.)

Для упражненія учениковъ въ обратномъ вычисленіи и въ разложеніи чиселъ на два множителя имъ предлагаются задачи, въ которыхъ по данной площади опредѣляется длина и ширина ея.

„Поверхность стола равна 320 квадратнымъ дюймамъ; какой длины и ширины можетъ быть этотъ столъ?“ Длина 20 и ширина 16 дюймовъ, или длина 32, а ширина 10 дюйм., или длина 40, а ширина 8 дюйм. и т. д.

Не знаетъ ли кто, какими мѣрами измѣряются площади полей?

Десятинами.

Учитель чертитъ прямоугольникъ, представляющій фигуру десятины.

Вотъ четыреугольникъ, изображающій фигуру десятины. Можно ли его назвать квадратомъ? Чѣмъ онъ отличается отъ квадрата? Стороны его не всѣ равны между собою. Въ чемъ онъ имѣетъ сходство съ квадратомъ? Всѣ четыре угла у него равны между собою, какъ и у квадрата.

Замѣтьте, что десятиною называется четыреугольное поле, имѣющее въ длину 60 саж. и въ ширину 40 саж. Сколько, значитъ, десятина заключаетъ въ себѣ квадратныхъ саженъ? $60 \times 40 = 2400$ квадр. саж.

Десятиною также называется четыреугольникъ такого же вида, то-есть съ равными углами, но имѣющій въ длину 80 саж., а въ ширину 30 саж. Сколько такая десятина заключаетъ въ себѣ квадр. саженъ? $80 \times 30 = 2400$ квадр. саженъ.

Затѣмъ идетъ рѣшеніе задачъ.

Задача. (Изъ Сборника № 1330). Мостъ имѣетъ въ длину 50 арш. и въ ширину 8 арш. Сколько нужно досокъ, длиною каждая въ 7 арш. и шириною въ 16 дюймовъ, для настилки этого моста?

Вычисленіе.

$$50 \times 8 = 400$$

$$28 \times 7 = 196; \quad 196 \times 16 = 1176 + 196\cdot 10 = 3136$$

$$28 \times 28: \ 224,\ 56 \to 784$$

$$784 \times 400 = 313600$$

$$313600 : 3136 = 100$$

Строчки.

Площадь моста = 50 × 8 = 400 □ арш.
1 □ аршинъ = 28 × 28 = 784 □ дюймамъ.
Площадь моста = 784 × 400 = 313600 □ дюймамъ.
7 аршинъ = 28 × 7 = 196 дюймамъ.
Площадь доски = 196 × 16 = 3136 □ дюймамъ.
Досокъ потребуется 313600 : 3136 = 100.

Вопросы для повторенія.

Что значитъ измѣрить какую-либо величину? Съ чѣмъ сравнивается всегда измѣряемая величина?

Чѣмъ измѣряются поверхности?

Какія извѣстны вамъ квадратныя мѣры?

Какая фигура называется четыреугольникомъ?

Какой четыреугольникъ называется квадратомъ?

Что называется квадратнымъ аршиномъ, квадр. футомъ?

Какъ измѣрить площадь, имѣющую фигуру четыреугольника съ равными углами?

Кубическія мѣры.

При объясненіи кубическихъ мѣръ и пріема измѣренія объема прямоугольнаго параллелепипеда хорошимъ пособіемъ можетъ служить кубическая четверть аршина, состоящая изъ 64 кубическихъ вершковъ, изъ которыхъ можно устраивать различныхъ размѣровъ кубы и призмы.

Здѣсь также, какъ и при объясненіи квадратныхъ мѣръ, вначалѣ выясняется необходимость измѣренія объема и необходимость особенной единицы мѣры—кубической, что можно сдѣлать, сравнивая, напримѣръ, величину ариѳметическаго ящика съ величиной какого-либо другаго ящика или съ величиной комнаты.

Изъ этого сравненія ученики выводятъ, что величина тѣла или объема зависитъ отъ его высоты, ширины и длины, что зная высоту какой-либо шкатулки и ея длину, еще нельзя вполнѣ судить объ объемѣ шкатулки, что величина шкатулки будетъ опредѣлена, если сравнить ее съ величиною другаго тѣла, вполнѣ извѣстною. Затѣмъ, для болѣе подробнаго выясненія зависимости объема тѣла отъ трехъ его протяженій, ученики сравниваютъ одинъ кубикъ съ брускомъ и выводятъ, что брусокъ въ 10 разъ болѣе кубика, потому что онъ въ 10 разъ длиннѣе его; изъ сравненія доски съ брускомъ выводится, что доска въ 10 разъ болѣе бруска, потому что длина и толщина ея равны длинѣ и толщинѣ бруска, а ширина въ 10 разъ больше.

Изъ кубическихъ вершковъ устраиваются различной величины призмы и сравниваются между собою по объему. Напримѣръ одна призма имѣетъ въ ширину 2 вершка, въ длину 3 вершка и въ вышину 4 вершка; предлагается устроить призму въ два раза бо́льшую. Для этого нужно увеличить ее въ два раза или по длинѣ, или по ширинѣ, или по вышинѣ. Что сдѣлается съ призмою отъ увеличенія въ два раза всѣхъ трехъ ея протяженій? Отъ увеличенія длины въ два раза объемъ призмы увеличится тоже въ два раза; отъ увеличенія ширины новой призмы въ два раза она увеличится въ два раза, а, значитъ, прежняя станетъ въ 4 раза больше; наконецъ, отъ увеличенія высоты третьей призмы въ два раза она увеличится въ два раза, а, значитъ, объемъ данной призмы увеличится въ 8 разъ.

Затѣмъ выводится, что объемы тѣлъ нужно сравнивать съ объемомъ куба, принятаго за единицу мѣры. Перечисляются кубическія мѣры и опредѣляется, что понимать подъ кубическимъ аршиномъ, кубическимъ дюймомъ и т. п.

При переходѣ къ выводу правила измѣренія объема тѣлъ, имѣющихъ форму прямоугольной призмы, учитель устраиваетъ изъ кубическихъ вершковъ такую призму и предлагаетъ ученикамъ сосчитать, сколько въ этой призмѣ кубическихъ вершковъ. Положимъ, что устроенная призма имѣетъ по длинѣ 4 вершка, по ширинѣ 3 и по вышинѣ 5 вершковъ. Ученики ведутъ вычисленіе такъ: по длинѣ этой призмы уложилось 4 кубическихъ вершка, по ширинѣ такихъ рядовъ по 4 кубика будетъ 3, значитъ, въ основаніи лежитъ слой въ $4 \times 3 = 12$ кубич. вершковъ; по вышинѣ призмы такихъ слоевъ укладывается 5, а 5 разъ по 12 кубическихъ

вершковъ будетъ 60 куб. вершковъ. Итакъ, призма эта содержитъ въ себѣ 60 кубическихъ вершковъ.

Потомъ рѣшаются вопросы безъ помощи построенія призмъ въ отвлеченномъ видѣ, и дѣлается переходъ къ тому, что, для измѣренія объема такихъ призмъ, нѣтъ надобности мѣрить ихъ кубическими мѣрами по тремъ протяженіемъ, что достаточно употребить для этого линейную мѣру. Наконецъ выводится правило измѣренія объема, составляется таблица кубическихъ мѣръ и рѣшаются вопросы обратные, въ родѣ такого: Объемъ призмы равенъ 480 куб. вершк. Какой длины, ширины и высоты можетъ быть эта призма? При рѣшеніи такихъ неопредѣленныхъ вопросовъ ученикамъ приходится разлагать данное число на три множителя.

Задача. (Изъ Сборника № 1359). Работники вырыли каналъ длиною въ 4 саж., глубиною въ 3 фута 6 дм. и шириною тоже въ 3 фута 6 дм. Сколько получили они за эту работу, если за куб. футъ вынутой земли имъ платили 10 коп.?

Вычисленіе.

$7 \times 4 = 28$
$\times 12$
56
28
336

$12 \times 3 = 36$
$+6$
42

336
$\times 42$
672
1344
14112
$\times 42$
28224
56448
592704

592704 | 1728
5184 | 343
7430
6912
5184
5184
„ „ „ „

$10 \times 343 = 3430$

Строчки.

4 саж. $= 12 \times 7 \times 4 = 336$ дюймамъ.
3 фута 6 дм. $= 12 \times 3 + 6 = 42$ дюймамъ.
Объемъ канала $= 336 \times 42 \times 42 = 592704$ куб. дюймамъ $=$
$= 592704 : 1728 = 343$ куб. фут.
Работники получили 10 коп. $\times 343 = 34$ руб. 30 коп.

Вопросы для повторенія.

Чѣмъ измѣряются объемы тѣлъ?

Какія бываютъ кубическія мѣры?

Что называется кубическою саженью?

Какъ измѣрить объемъ прямоугольной призмы?

Задачи на вычисленіе поверхности и объема расположены въ Сборникѣ слѣдующимъ образомъ:

1) Задачи отъ № 1313 до № 1319. Нахожденіе площади прямоугольника по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ простыми именованными числами.

2) Задачи отъ № 1319 до № 1321. Нахожденіе площади квадрата по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ простыми именованными однородными числами.

3) Задачи отъ № 1321 до № 1323, въ которыхъ по данной площади прямоугольника и одному линейному измѣренію, выраженнымъ въ однородныхъ именованныхъ числахъ, требуется найти другое линейное измѣреніе.

4) Задачи отъ № 1323 до № 1327. Нахожденіе площади прямоугольника и квадрата по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ простыми и сложными именованными числами.

5) Задача подъ № 1327, въ которой по данной площади прямоугольника и одному линейному измѣренію, выраженнымъ составными именованными числами, требуется найти другое линейное измѣреніе.

6) Задачи отъ № 1328 до № 1346 — сложныя, расположенныя по степени трудности рѣшенія.

7) Задачи отъ № 1346 до № 1350. Нахожденіе объема прямоугольной призмы по даннымъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ сперва однородными, а потомъ разнородными простыми именованными числами.

8) Задачи отъ № 1350 до № 1352, въ которыхъ по данному объему и двумъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ однородными простыми именованными числами, требуется найти третье линейное измѣреніе.

9) Задачи отъ № 1352 до № 1354 для нахожденія объема по даннымъ тремъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ составными именованными числами.

10) Задачи отъ № 1354 до № 1356, въ которыхъ по данному объему и двумъ линейнымъ измѣреніямъ, выраженнымъ составными именованными числами нужно найти третье линейное измѣреніе.

11) Задачи отъ № 1356 до № 1375—сложныя, расположенныя по степени трудности рѣшенія.

12) Задачи отъ № 1375 даны на вычисленіе поверхности и объема вмѣстѣ.

Элементарный курсъ простыхъ дробей.

При изученіи чиселъ первой сотни ученики познакомились съ дробью, какъ съ кратною частью цѣлаго числа, а при упражненіяхъ съ различными мѣрами и ихъ частями получили понятіе о дроби, какъ извѣстной части единицы, и о происхожденіи ея вслѣдствіе дѣленія единицы на равныя части. Теперь имъ предстоитъ изучить свойства дроби и всѣ дѣйствія съ дробями на основаніи наглядныхъ пособій и тѣхъ знаній, которыя пріобрѣтены ими при прохожденіи предшествовавшихъ курсовъ.

Элементарный курсъ дробей проходится тѣмъ же практическимъ, нагляднымъ путемъ, какъ и курсъ цѣлыхъ чиселъ. Ученики исходятъ постепенно отъ примѣра и задачи и доходятъ до обобщенія и правила; такъ что и здѣсь правило является, какъ собственный выводъ учениковъ, сдѣланный посредствомъ обобщенія частныхъ примѣровъ.

Первыя упражненія, необходимыя для образованія понятія о сущности и составѣ дроби, а также для изученія свойствъ ея, производятся при посредствѣ наглядныхъ пособій, изъ которыхъ, какъ удобнѣйшее, я избираю *ариѳметическіе дробные счеты;* впрочемъ всѣ упражненія, излагаемыя мною и производимыя на этомъ пособіи, могутъ быть воспроизводимы и на другихъ пособіяхъ, имѣющихся въ школѣ и принаравленныхъ для дробей.

Дробные счеты. Наиболѣе употребительные классные дробные счеты состоятъ изъ четыреугольной рамки, въ которой продѣто 15 или болѣе горизонтальныхъ проволокъ, удобно вынимающихся изъ рамки, если открутить винты, находящіеся на ихъ концахъ. На верхней проволокѣ надѣтъ тонкій цилиндръ, длиною обыкновенно въ 1 футъ, свободно двигающійся съ одного конца проволоки на другой и занимающій половину всей проволоки. На слѣдующихъ проволокахъ такіе же по длинѣ и діаметру цилиндры разрѣзаны на равныя части, именно: на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24. Иногда даже не бываетъ и седьмыхъ долей; вообще доли подбираются простѣйшія, чаще встрѣчающіяся и удобно выражающіяся однѣ посредствомъ другихъ. Такимъ образомъ получаются слѣдующія доли цилиндра: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{15}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{20}$, $^1/_{24}$. На нѣкоторыхъ счетахъ внизу еще на послѣдней проволокѣ надѣтъ для удобства сравненія такой же цѣлый цилиндръ, какъ и

на первой, безъ чего можно обойтись, потому что если всѣ доли любаго цилиндра сдвинуть на одинъ конецъ проволоки, то на каждой проволокѣ образуется цѣлый цилиндръ. Рамка счетовъ или утверждается на треножномъ высокомъ шативѣ, такъ что счеты видны всему классу, или къ верхнему бруску рамки прикрѣпляются два крючка, посредствомъ которыхъ счеты вѣшаются на классную доску. Первый способъ установки счетовъ неудобенъ потому, что весь приборъ скоро расшатывается, легко валится и затрудняется переноска прибора съ мѣста на мѣсто. Та же рамка съ проволоками можетъ служить и для шаровъ при прохожденіи цѣлыхъ чиселъ.

Для удобства нахожденія требуемыхъ частей цилиндра, съ боку на рамкѣ написана у каждой проволоки цифра, означающая, на сколько равныхъ частей раздѣленъ цилиндръ на этой проволокѣ. Всѣ цилиндры и доли ихъ одноцвѣтные, приготовленные обыкновенно изъ сухаго буковаго или дубоваго дерева; на нѣкоторыхъ счетахъ части цилиндра бываютъ окрашены въ двѣ краски поперемѣнно, такъ что однѣ доли желтыя, а другія черныя или красныя, для того, чтобы удобнѣе было ученикамъ съ мѣста различать дѣленія цилиндровъ на части (напримѣръ, на той проволокѣ, гдѣ цилиндръ раздѣленъ на четверти, первая четверть желтая, вторая—черная, третья—желтая, четвертая—черная). Но это окрашиваніе одноименныхъ долей цилиндра въ разные цвѣта можетъ дать ученикамъ ложное представленіе о частяхъ единицы вообще, которыя должны быть на одной проволокѣ всѣ равныя и совершенно однообразныя; притомъ гораздо лучше, если дѣленіе на части незамѣтно, когда всѣ части сдвинуты вмѣстѣ и цилиндръ раздѣляется на требуемое число частей, такъ сказать, передъ глазами учениковъ по мѣрѣ надобности.

Наконецъ еще для облегченія классной работы половина рамки закрывается доскою, которая удобно снимается и прикрѣпляется. Внутренняя сторона этой доски, то-есть обращенная къ цилиндрамъ, разграфлена линіями, идущими въ вертикальномъ направленіи, на 24 равныя части. Такъ какъ ширина доски равна длинѣ цилиндра, то ширина каждой полоски ея, заключенной между двумя линіями, равна длинѣ $^1/_{24}$ части цилиндра. Эти линіи служатъ для того, чтобы издали легко было сравнивать между собою по величинѣ различныя части цилиндровъ, иначе трудно было бы ученикамъ съ мѣста отличить $^1/_{15}$ отъ $^1/_{16}$, между тѣмъ какъ при вспомогательной доскѣ $^1/_{15}$ выходитъ за черту, а $^1/_{16}$ не доходитъ до той же черты. Лучше, если доска будетъ черная, а полосы на ней бѣлыя, или наоборотъ: тогда самыя полосы ясно видны классу.

Дробные счеты Наманскаго. Для каждой доли устроена небольшая отдѣльная рамка съ горизонтальными проволоками, на которыхъ тонкій цилиндръ раздѣленъ на одно и то же число равныхъ долей. Такихъ рамокъ десять, именно для 1, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. до $^1/_{10}$. Счеты эти удобны для изученія каждой доли въ отдѣльности по способу Грубе. Въ книгѣ Паульсона: «Ариѳметика по способу нѣмецкаго педагога Грубе» подробно изложены всѣ упражненія, которыя Грубе совѣтуетъ произвести при изученіи долей единицы; эти-то упражненія удобно производятся при помощи счетовъ Наманскаго.

Ариѳметическіе счеты Коховскаго представляютъ соединеніе счетовъ для цѣлыхъ чиселъ съ дробными. Въ ящикѣ, находящемся подъ рамкою шведскихъ счетовъ, имѣется наборъ шаровъ для упражненій съ цѣлыми числами и цилиндровъ для упражненій съ дробями. Смотря по надобности, на удобно вывинчивающіяся проволоки надѣваются или шары, или цилиндры; для упражненій съ дробями на этихъ счетахъ проволокъ горизонтальныхъ больше, нежели на обыкновенныхъ шведскихъ счетахъ для того, чтобы можно было размѣстить всѣ доли цилиндра. Чтобы не перепутать различныхъ долей цилиндра, когда онѣ сняты съ проволокъ, ихъ или нанизываютъ въ порядкѣ на снурокъ, или кладутъ въ отдѣленія, сдѣланныя въ ящикѣ для мелкихъ долей.

На верхнія вертикальныя проволоки этихъ счетовъ надѣваются шары разноцвѣтные; такъ напримѣръ шары, означающіе единицы—желтаго цвѣта, десятки—краснаго, сотни—бѣлаго, тысячи—чернаго и т. д.; окрашиваніе шаровъ въ различные цвѣта сдѣлано съ тою цѣлью, чтобы отмѣтить значеніе шаровъ, находящихся на разныхъ проволокахъ.

Вся рамка счетовъ закрывается удобно снимающеюся и складывающеюся пополамъ доскою; одна половина этой доски, обращенная къ проволокамъ, разграфлена для дробей полосами, а сзади къ полной доскѣ (когда закрываются всѣ счеты) привѣшиваются планки, на которыя можно выставлять кубики при упражненіяхъ съ ариѳметическимъ ящикомъ или буквы на картонахъ при обученіи дѣтей грамотѣ. Когда планки сняты, на доскѣ можно писать мѣломъ, и она замѣняетъ классную доску.

1) Происхожденіе и составъ дроби.

Учитель ставитъ счеты передъ классомъ, такъ что всѣ части валиковъ сдвинуты вмѣстѣ, и, слѣдовательно, на каждой проволокѣ ученики видятъ цѣлый валикъ.

Какъ велика длина каждаго валика, надѣтаго на проволоку? Одинъ футъ.

Раздѣлимъ валикъ на второй проволокѣ на двѣ равныя части. Какъ великъ теперь каждый валикъ? Полфута.

Какъ называется каждый валикъ по отношенію къ цѣлому? Половина.

Сколько въ половинѣ фута дюймовъ? (6.)

Вотъ листъ бумаги; какъ взять половину этого листа? Раздѣлить, разорвать на двѣ равныя части.

На сколько еще равныхъ частей можно раздѣлить футъ? На три, четыре, пять, десять, двадцать, сколько угодно.

Раздѣлите футъ на три равныя части на третьей проволокѣ. Какъ назвать теперь каждую часть? Треть фута.

Сколько въ трети фута дюймовъ? (4.)

Какая часть фута больше: половина или треть, и почему? Половина больше, потому что половина въ футѣ заключается только два раза, а треть три раза.

Сколько вмѣсто цѣлаго фута надо взять половинъ, сколько третей? Двѣ половины, три трети.

Изъ какихъ еще частей можно составить футъ? Изъ четырехъ четвертей, пяти пятыхъ, шести шестыхъ, двадцати двадцатыхъ и т. д.

Разложите футъ на счетахъ на четыре четверти, на восемь восьмыхъ, на десять десятыхъ.

Для закрѣпленія въ сознаніи учениковъ состава единицы изъ равныхъ частей имъ предлагаются примѣры и задачи въ родѣ слѣдующихъ: „$^1/_{12}$ фунта чаю стоитъ 20 копеекъ. Сколько стоитъ цѣлый фунтъ?"

Назовите мѣры, изъ которыхъ одна составляетъ треть другой, седьмую, восьмую, шестнадцатую часть другой. (1 арш. $= {}^1/_3$ сажени, 1 футъ $= {}^1/_7$ сажени и т. п.)

Какая часть фута равняется дюйму? Двѣнадцатая. Сколько дюймовъ въ $^1/_6$ части фута? (2.)

Какая часть фута больше: восьмая или четвертая, во сколько разъ и почему? Четвертая больше восьмой въ два раза, потому что четвертая часть содержится въ футѣ только четыре раза, а восьмая—восемь разъ; значитъ, въ каждой четверти по двѣ восьмыхъ.

Какъ удобнѣе футъ дѣлить на 8 равныхъ частей? Сначала пополамъ, потомъ каждую половину пополамъ и, наконецъ, каждую четверть пополамъ.

Нужно взвѣсить заразъ двѣ вещи: въ $^1/_2$ фунта и въ $^1/_4$ фунта, гирями въ $^1/_8$ фунта. Сколько такихъ гирь надо положить на чашку вѣсовъ, чтобы вѣсы пришли въ равновѣсіе?

$^1/_4$ пуда сахару нужно раздать тремъ, четыремъ, пяти человѣкамъ поровну. Какую часть пуда получитъ каждый?

Когда, такимъ образомъ, сообщено ученикамъ понятіе о частяхъ единицы, можно перейти къ составу дроби, заключающей въ себѣ нѣсколько частей единицы.

Раздѣлите футъ на три равныя части и возьмите двѣ такихъ части. Сколько получилось и сколько осталось? Получилось двѣ трети и осталась одна треть.

Возьмите на счетахъ три четверти фута?

Какъ взять на счетахъ $^5/_{12}$ фута? Нужно футъ раздѣлить на 12 равныхъ частей и взять такихъ частей 5.

Вотъ листъ бумаги; какъ мнѣ отрѣзать отъ него $^3/_8$ части? Нужно листъ согнуть на 8 равныхъ частей и отрѣзать три такихъ части.

Какъ понимать, когда говорятъ, что на жилетъ пошло $^5/_8$ аршина сукна? Это значитъ, что отъ цѣлаго аршина, раздѣленнаго на 8 равныхъ частей, на жилетъ взято только 5 частей.

Значитъ, сколько вершковъ сукна пошло на жилетъ? 10 вершковъ, потому что въ $^1/_8$ аршина 2 вершка, а въ $^5/_8$ въ 5 разъ болѣе, то-есть 10 вершковъ.

Въ $^7/_{10}$ пуда сколько фунтовъ? Въ $^9/_{16}$ фунта сколько лотовъ?

Аршинъ какую часть сажени составляетъ? А два аршина? 4 фута какой части сажени равняются? 7 вершковъ какая часть аршина? ($^7/_{16}$, потому что 1 вершокъ составляетъ $^1/_{16}$ часть аршина, а 7 вершковъ въ 7 разъ болѣе, значитъ составляютъ $^7/_{16}$ аршина.)

Когда мы какую-либо единицу, напримѣръ, футъ, аршинъ, сажень, пудъ, листъ бумаги и т. п., дѣлимъ на равныя части, то мы *раздробляемъ* эти единицы и получаемъ ихъ части, которыя называются *дробями.*

Скажите какія-нибудь дроби, $^1/_2$ фута, $^1/_3$ аршина, $^3/_5$ сажени, $^7/_{20}$ пуда и т. п.

Въ каждой дроби сколько нужно различать чиселъ, необходимыхъ для ея выраженія, и какое значеніе имѣютъ эти числа? Нужно различать два числа: одно показываетъ, на сколько равныхъ частей единица раздѣлена, а другое—сколько такихъ частей въ составъ дроби взято.

Если единица раздѣлена на 12 равныхъ частей и взято такихъ частей 8, то какая получается дробь? Восемь двѣнадцатыхъ.

Замѣтьте, что число, которое показываетъ, на сколько равныхъ частей единица раздѣлена, называется для краткости *знаменателемъ* дроби, а число, показывающее, сколько такихъ частей взято въ составъ дроби, называется *числителемъ.*

Въ дроби $^5/_{18}$ какое число будетъ знаменателемъ и какое числителемъ?

Когда надо взять какую-нибудь дробь единицы, на какое изъ этихъ чиселъ нужно прежде обратить вниманіе? На знаменателя, потому что прежде всего надо знать, на сколько равныхъ частей нужно раздѣлить единицу.

Такъ какъ дробь выражается двумя числами, то и для изображенія ея необходимы два числа: одно—означающее знаменателя, а другое—числителя; напримѣръ, дробь $^5/_6$ изображается двумя числами, гдѣ 6 знаменатель, а 5 числитель.

Напишите дробь $^{11}/_{15}$ и скажите, что она означает. Единица раздѣлена на 15 равныхъ частей и взято такихъ частей 11.

Затѣмъ идетъ упражненіе въ писаніи учениками дробей, диктуемыхъ учителемъ, въ откладываніи на счетахъ дробей, написанныхъ учителемъ на доскѣ, и въ писаніи и чтеніи дробей, откинутыхъ на счетахъ.

Послѣ выясненія ученикамъ происхожденія дроби вслѣдствіе непосредственнаго раздѣленія единицы на равныя части, нужно выяснить имъ также происхожденіе дроби вслѣдствіе раздѣленія всякаго цѣлаго числа на равныя части. Это дѣлается посредствомъ примѣровъ и задачъ и поясняется чертежомъ или тѣми же дробными счетами.

Скажите половину четырехъ, пятую часть 15-ти, шестую часть 30-ти и т. д.

Если веревку длиною въ 3 арш. разрѣзать на 4 равныя части, то сколько аршинъ будетъ въ каждой части? Четвертая часть одного аршина будетъ $^{1}/_{4}$ арш., то четвертая часть трехъ аршинъ будетъ въ 3 раза болѣе, то-есть $^{3}/_{4}$ аршина.

Какъ раздѣлить хлѣбъ вѣсомъ въ 5 фунтовъ между восемью рабочими поровну? Отъ каждаго фунта вѣса каждому изъ восьми рабочихъ придется восьмая часть, слѣдовательно отъ 5 фунтовъ каждому достанется 5 разъ по $^{1}/_{8}$ или $^{5}/_{8}$ фунта; значитъ, восьмая часть 5 фунтовъ равна $^{5}/_{8}$ одного фунта.

Чему равна 12-я часть 7, 15-я часть 9, шестая часть 3?

Въ случаѣ неяснаго пониманія учениками того, напримѣръ, что $^{3}/_{4}$ аршина произошло отъ дѣленія 3 арш. на 4 равныя части, разъясненіе дается имъ посредствомъ чертежа, на которомъ показывается, что $^{3}/_{4}$ аршина все равно, что четверть трехъ аршинъ, или посредствомъ складнаго аршина, раздѣленнаго на 4 равныя части, и складной сажени, раздѣленной на 12 равныхъ частей. Помощью этихъ пособій вполнѣ наглядно доказывается, что $^{3}/_{4}$ аршина $= ^{1}/_{4}$ трехъ аршинъ. То же самое доказывается обращеніемъ $^{3}/_{4}$ аршина въ вершки (12) и опредѣленіемъ, какая это будетъ часть трехъ аршинъ или сажени. $(48 : 12 = 4.)$

Послѣ этихъ предварительныхъ упражненій предлагаются ученикамъ задачи на дѣленіе чиселъ, при которомъ получается остатокъ, и объясняется составъ полнаго частнаго и происхожденіе дроби отъ дѣленія одного числа на другое.

Параллельно съ упражненіемъ учениковъ на счетахъ и посредствомъ примѣровъ для выясненія происхожденія и состава дроби, они рѣшаютъ соотвѣтствующія этому отдѣлу задачи изъ „Сборника" [часть 2-я, задачи

на происхожденіе дробей отъ № 1 до № 12 и численные примѣры отъ № 12 до № 36].

Задача. (Изъ Сборника № 6). Купили голову сахару въ $^5/_8$ пуда и въ теченіи 10 дней тратили ежедневно по $^1/_2$ фунта, а потомъ расходовали по цѣлому фунту. На сколько дней хватило всего этого сахару?

Рѣшеніе. Если въ день выходило $^1/_2$ фунта, то въ 10 дней вышло въ 10 разъ болѣе, а 10 половинъ составляютъ 5 фунтовъ; итакъ, въ 10 дней вышло 5 фунтовъ сахару. Сахару было $^5/_8$ пуда; надо высчитать, сколько это составитъ фунтовъ въ $^1/_8$ пуда 5 фунтовъ, потому что восьмая часть пуда или 40 фунтовъ будетъ 5 фунтовъ, а въ $^5/_8$ пуда будетъ въ 5 разъ болѣе, то-есть 25 фунтовъ. Изъ 25 фунтовъ израсходовано въ 10 дней 5 фунтовъ, значитъ, осталось 20 фунтовъ; а расходуя въ день по одному фунту, можно эти 20 фунтовъ израсходовать въ 20 дней. Итакъ, всего сахару хватило на $10 + 20 = 30$ дней.

2) Дробь правильная и неправильная, смѣшанное число.

Возьмите на счетахъ $^4/_{15}$; прибавьте къ этой дроби $^7/_{15}$. Сколько составилось? ($^{11}/_{15}$.)

Сложите на счетахъ $^7/_9$ и $^5/_9$. Сколько получится? Должно получиться $^{12}/_9$, но $^{12}/_9$ на одной проволокѣ взять нельзя, потому что это больше единицы, а потому мы возьмемъ сперва $^9/_9$, то-есть цѣлую единицу, и еще на другой проволокѣ $^3/_9$ и составится 1 и $^3/_9$.

Ученикамъ напоминается, что когда отъ сложенія единицъ какого-либо разряда получаются единицы высшаго разряда, то онѣ выключаются изъ единицъ, получившихся въ суммѣ.

Затѣмъ, ученики берутъ на счетахъ $^7/_5$ фута, $^{12}/_4$ фута, $1^1/_2$ фута, $^{15}/_4$ фута и т. д.; цѣлые футы съ долями, взятые на счетахъ, записываются учениками на доскахъ въ видѣ неправильной дроби и въ видѣ смѣшаннаго числа; неправильную дробь, продиктованную учителемъ, или записанную на классной доскѣ, берутъ на счетахъ въ видѣ смѣшаннаго числа и т. п. При этомъ смѣшанное число, напримѣръ $3^5/_8$, обращается въ дробь такимъ образомъ: „въ единицѣ $^8/_8$, то въ трехъ единицахъ въ три раза болѣе, то-есть $^{24}/_8$, а $^{24}/_8$ и $^5/_8$ составитъ $^{29}/_8$."

Изъ неправильной дроби, напримѣръ $^{11}/_3$, исключается цѣлое число такъ: „въ единицѣ $^3/_3$, то въ $^{11}/_3$ будетъ столько единицъ, сколько разъ 3 содержится въ 11, а 3 содержится въ 11 три раза и еще остается 2; значитъ, въ $^{11}/_3$ заключается 3 единицы и еще двѣ трети доли единицы, то-есть $^{11}/_3 = 3^2/_3$."

Выясняется: а) понятіе о дроби правильной и неправильной; б) по какому внѣшнему признаку узнается дробь правильная и неправильная; в) почему дроби $^{13}/_6$, $^{18}/_3$ и т. п. называются неправильными (онѣ больше единицы); г) обращеніе смѣшаннаго числа въ неправильную дробь; д) исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби; е) что больше: $4^2/_9$ фута или $^{40}/_9$ фута, и какъ это узнать?

3) Выраженіе данной дроби въ различныхъ видахъ и сокращеніе дробей.

По требованію учителя ученики берутъ на счетахъ на разныхъ проволокахъ $^1/_2$ фута, одинъ ученикъ беретъ на второй проволокѣ $^1/_2$ фута, другой на восьмой $^4/_8$ фута, третій на шестой $^3/_6$ фута, и т. д. Составляется табличка:

$^1/_2={}^2/_4={}^3/_6={}^4/_8={}^5/_{10}={}^6/_{12}={}^8/_{16}={}^{10}/_{20}={}^{12}/_{24}$.

Табличка эта записывается на доскахъ учениками, и рѣшаются вопросы: а) въ какихъ еще доляхъ можетъ быть выражена $^1/_2$; б) почему $^1/_2$ не можетъ быть выражена въ 9-хъ, въ 15-хъ и т. п. доляхъ; в) какъ узнаютъ, въ какихъ доляхъ данная дробь можетъ быть выражена и въ какихъ не можетъ? (Нужно, чтобы число долей дѣлилось на знаменателя данной дроби.)

Письменно ученики составляютъ также табличку для выраженія $^1/_3$, $^1/_5$ въ различныхъ доляхъ.

$^1/_3={}^2/_6={}^3/_9={}^4/_{12}={}^5/_{15}={}^6/_{18}={}^7/_{21}={}^8/_{24}$ и т. д.

$^1/_5={}^2/_{10}={}^3/_{15}={}^4/_{20}={}^5/_{25}={}^6/_{30}={}^7/_{35}={}^8/_{40}$ и т. д.

На основаніи этихъ табличекъ ученики рѣшаютъ простенькія задачи въ родѣ слѣдующихъ: „$^1/_{15}$ фунта варенья стоитъ 10 коп., сколько стоитъ $^1/_3$ фунта, $^1/_5$ фун.?“ и т. п.

Потомъ идутъ обратныя упражненія: дробь $^{12}/_{24}$ взять на различныхъ проволокахъ счетовъ:

$$^{12}/_{24}={}^{10}/_{20}={}^8/_{16}={}^6/_{12}={}^5/_{10}={}^4/_8={}^3/_6={}^2/_4={}^1/_2.$$

Какъ доказать безъ помощи счетовъ, что дробь $^{12}/_{24}$ равна $^4/_8$? (24-я доли единицы въ 3 раза мельче 8-хъ, потому что въ $^1/_8$ заключается $^3/_{24}$; слѣдовательно, вмѣсто $^{12}/_{24}$ нужно взять 8-хъ долей въ три раза менѣе, то-есть $^4/_8$).

Возьмите на счетахъ дробь $^{15}/_{20}$ и найдите, на какой еще проволокѣ можно взять дробь, равную этой. (Доли вдвое крупнѣе 20-хъ будутъ 10-ыя, но въ $^1/_{10}$ заключается $^2/_{20}$, то-есть только четное число 20-хъ долей можетъ быть выражено въ десятыхъ. Доли въ 5 разъ крупнѣе 20-хъ будутъ четвертыя; $^5/_{20}={}^1/_4$, то $^{15}/_{20}={}^3/_4$.)

Какая дробь проще: $^{15}/_{20}$ или $^{3}/_{4}$, и почему?) Вторая дробь проще и понятнѣе, потому что доли крупнѣе; приходится единицу дѣлить на большія части, а не на мелкія.)

Скажите вмѣсто $^{18}/_{24}$ дробь попроще. ($^{9}/_{12}$, $^{3}/_{4}$.)

Объясните, что дробь $^{18}/_{24}=^{3}/_{4}$. (4-ыя доли въ 6 разъ крупнѣе 24-хъ, но ихъ взято въ 6 разъ менѣе, нежели 24-хъ; значитъ, $^{3}/_{4}$ все равно, что $^{18}/_{24}$.)

Скажите дробь, которая была бы проще $^{5}/_{12}$. Почему эту дробь нельзя выразить въ болѣе крупныхъ доляхъ? (Если взять доли въ два раза крупнѣе, то-есть 6-ыя, то нужно взять ихъ въ 2 раза менѣе 5-ти, а 5 на два на-цѣло не дѣлится, значитъ, дробь $^{5}/_{12}$ сократить на 2 нельзя; и т. д.)

Отчего же дробь становится проще, понятнѣе? (Отъ увеличенія самыхъ долей, то-есть отъ уменьшенія знаменателя.)

Всякую ли дробь можно упростить, и отчего это зависитъ?

Скажите по одной дроби, которую можно упростить, сократить. ($^{6}/_{8}$, $^{9}/_{15}$, $^{10}/_{20}$ и т. д.)

Скажите по одной дроби, которую нельзя сократить. ($^{2}/_{5}$, $^{7}/_{8}$, $^{5}/_{18}$ и т. д.)

На основаніи усвоеннаго учениками понятія объ упрощеніи дробей и самаго пріема сокращенія, они рѣшаютъ задачи. („Сборникъ", часть 2-ая, устныя и письменныя задачи на сокращеніе отъ № 36 до № 57 и численные примѣры отъ № 57 до № 67.)

Устная задача. (Изъ Сборника № 40). Сколько заплатилъ кучеръ за $^{48}/_{60}$ пуда сѣна, если пудъ этого сѣна стоитъ 35 коп.?

Рѣшеніе: $^{48}/_{60}=^{4}/_{5}$.

1 пудъ стоитъ 35 коп.
$^{1}/_{5}$ пуда „ $35 : 5 = 7$ коп.
$^{4}/_{5}$ „ „ $7 \times 4 = 28$ „

Письменная задача. (Изъ Сборника № 49). Нужно было выкопать канаву на протяженіи 3 верстъ; въ первую недѣлю работники выкопали $^{15}/_{35}$ вер., во вторую $^{20}/_{28}$ вер., въ третью $^{36}/_{42}$ вер., въ четвертую $^{6}/_{21}$ вер., а всю остальную работу окончили въ пятую недѣлю. Сколько денегъ получили работники за пятую недѣлю, если съ версты имъ платили по 42 руб.?

Рѣшеніе: $^{15}/_{35} = ^{3}/_{7}$
$^{20}/_{28} = ^{5}/_{7}$
$^{36}/_{42} = ^{6}/_{7}$
$^{6}/_{21} = ^{2}/_{7}$

$^{3}/_{7} + ^{5}/_{7} + ^{6}/_{7} + ^{2}/_{7} = ^{16}/_{7} = 2^{2}/_{7}$

$3 - 2^{2}/_{7} = ^{5}/_{7}$

За 1 версту платили 42 руб.
„ $^{1}/_{7}$ версты „ 42 : 7 = 6 руб.
„ $^{5}/_{7}$ „ „ $6 \times 5 = 30$ „

Результатомъ упражненій при прохожденіи этого отдѣла должны быть отвѣты на вопросы:

Въ какихъ доляхъ могутъ быть выражены дроби: $^{1}/_{3}$, $^{2}/_{5}$, $^{3}/_{4}$, $^{3}/_{7}$ и т. д., не измѣняя своей величины?

Какимъ дѣйствіемъ съ числителемъ и знаменателемъ дроби можно представить ее въ болѣе мелкихъ доляхъ?

Почему величина дроби не измѣняется отъ умноженія числителя и знаменателя ея на одно и то же число?

Когда величина дроби становится яснѣе, понятнѣе?

Что значитъ *сократить* дробь?

Какое дѣйствіе нужно произвести надъ числителемъ и знаменателемъ, чтобы сократить дробь?

Почему величина дроби не измѣняется отъ дѣленія числителя и знаменателя ея на одно и то же число?

Сократить дроби: $^{24}/_{36}$, $^{72}/_{96}$, $^{150}/_{180}$ и т. д.

4) Увеличеніе и уменьшеніе дробей.

На счетахъ ученикъ беретъ $^{1}/_{12}$ и $^{1}/_{3}$, сравниваетъ ихъ по величинѣ и записываетъ на доскѣ эти дроби. Другой ученикъ сравниваетъ $^{1}/_{2}$ и $^{1}/_{4}$, третій $^{3}/_{20}$ и $^{3}/_{5}$, четвертый $^{2}/_{9}$ и $^{8}/_{9}$ и т. д. Потомъ для перехода къ выводу предлагается работа обратная:

Возьмите на счетахъ дробь $^{2}/_{15}$ и дробь въ три раза бо̀льшую. ($^{6}/_{15}$.)

На какой еще проволокѣ можно взять дробь въ три раза бо̀льшую $^{2}/_{15}$? ($^{2}/_{5}$.)

Сравните дроби $^{2}/_{15}$ и $^{2}/_{5}$ и докажите, что вторая въ три раза больше первой. (Сравненіе идетъ такъ: $^{1}/_{5} = ^{3}/_{15}$, а $^{2}/_{5} = ^{6}/_{15}$, значитъ $^{2}/_{5}$ равно $^{2}/_{15}$, взятымъ три раза.)

Скажите дробь въ 4 раза бо̀льшую $^{2}/_{17}$, въ 5 разъ бо̀льшую $^{3}/_{20}$. ($^{8}/_{17}$, $^{3}/_{4}$ и $^{15}/_{20}$.)

Какъ увеличить данную дробь въ 3 раза? (Нужно или доли взять въ три раза крупнѣе, или самихъ долей взять въ три раза болѣе.)

Что надо сдѣлать съ числителемъ или знаменателемъ дроби, чтобы

увеличить ее въ 6 разъ? (Нужно или числителя умножить на 6, или знаменателя раздѣлить на 6.)

По какому изъ этихъ двухъ способовъ не всегда можно увеличить дробь въ заданное число разъ, а по какому всегда можно? (По второму не всегда можно, потому что знаменатель не всегда дѣлится на то число, во сколько разъ надо увеличить дробь, а по первому всегда можно, потому что числителя всегда можно умножить на заданное число.)

Скажите по одной дроби, которую можно было бы увеличить въ 7 разъ по второму способу. ($^3/_{14}$, $^5/_{21}$, $^{11}/_{42}$ и т. д.)

Скажите по одной дроби, которую можно было бы увеличить въ 4 раза только по первому способу. ($^2/_9$, $^3/_{11}$, $^4/_{25}$ и т. д.)

Скажите по одной дроби, которую можно было бы увеличить въ 3 раза по обоимъ способамъ. ($^2/_9$ $^5/_{12}$, $^1/_{24}$ и т. д.)

Также точно ведется классная работа и относительно вывода пріемовъ уменьшенія данной дроби въ нѣсколько разъ. Параллельно съ упражненіями на численныхъ примѣрахъ рѣшаются и задачи. („Сборникъ", часть 2-я, устныя и письменныя задачи на увеличеніе и уменьшеніе дробей отъ № 67 до № 104 и численные примѣры отъ № 104 до № 119.)

Устная задача. (Изъ Сборника № 75). Двѣ лошади бѣгутъ въ перегонку; одна въ 2 минуты пробѣгаетъ $^2/_9$ версты, а другая въ 3 минуты $^1/_3$ версты. На сколько первая лошадь обгонитъ вторую въ 5 минутъ?

Рѣшеніе: Первая лошадь въ 2 мин. пробѣгаетъ $^2/_9$ вер.
„ „ „ 1 „ „ $^1/_9$ „
Вторая лошадь „ 3 „ „ $^1/_3$ „
„ „ „ 1 „ „ $^1/_9$ „

Значитъ, лошади бѣгутъ наравнѣ, съ одинаковою скоростію.

Письменная задача. (Изъ Сборника № 97). 3 крестьянки привезли на рынокъ масло: одна 4 кадки, по $^5/_{12}$ пуда въ каждой, другая — двѣ, по $^2/_3$ пуда, а все масло третьей крестьянки было разложено поровну въ 5 кадокъ и вѣсило $3^1/_3$ пуда. Первыя двѣ крестьянки продали все свое масло, а третья только одну кадку. Сколько денегъ получили всѣ три крестьянки вмѣстѣ, если каждый пудъ масла продавали по 12 руб.?

Рѣшеніе:

Въ одной кадкѣ у 1-й крестьянки было масла $^5/_{12}$ пуда,
„ 4 кадкахъ „ „ „ „ $^5/_{12}\times4={}^5/_3=1^2/_3$ пуда
„ одной кадкѣ у 2-й „ „ „ $^2/_3$ пуда,
„ 2 кадкахъ „ „ „ „ $^2/_3\times2={}^4/_3=1^1/_3$ пуда
„ 5 кадкахъ у 3-й „ „ „ $3^1/_3$ пуда,
„ одной кадкѣ „ „ „ „ $3^1/_3:5={}^{10}/_3:5={}^2/_3$ пуда

Крестьянки масла продали: $1^2/_3+1^1/_3+^2/_3=3^2/_3$ пуда.

За $^1/_3$ пуда масла получали $12:3=4$ руб.

„ $3^2/_3$ „ или $^{11}/_3$ пуда получили $4\times11=44$ руб.

Выводъ изъ упражненій:

Что сдѣлается съ дробью, если числителя ея увеличить въ 5 разъ? Если знаменателя уменьшить въ 4 раза? Если числителя увеличить въ 6 разъ, а знаменателя въ 3 раза? и т. д.

Когда дробь увеличивается и когда уменьшается?

Какимъ образомъ увеличиваютъ дробь? Какимъ образомъ уменьшаютъ дробь?

На что прежде всего надо обратить вниманіе, когда желаютъ увеличить дробь въ данное число разъ? (Не дѣлится ли ея знаменатель на данное число.)

Какими двумя способами можно уменьшить дробь въ нѣсколько разъ и какой изъ нихъ удобнѣе?

5) Сложеніе и вычитаніе дробей съ разными знаменателями.

Возьмите на одной и той же проволокѣ дроби $^1/_2$ и $^1/_3$ вмѣстѣ.

$^1/_2=^3/_6$ $^1/_3=^2/_6$ $^3/_6+^2/_6=^5/_6$.

На какой еще другой проволокѣ можно сложить вмѣстѣ $^1/_2$ и $^1/_3$?

$^1/_2=^6/_{12}$ $^1/_3=^4/_{12}$ $^6/_{12}+^4/_{12}=^{10}/_{12}$

$^1/_2=^9/_{18}$ $^1/_3=^6/_{18}$ $^9/_{18}+^6/_{18}=^{15}/_{18}$

Сложите на счетахъ $^1/_4$ и $^1/_6$.

$^1/_4=^3/_{12}$ $^1/_6=^2/_{12}$ $^3/_{12}+^2/_{12}=^5/_{12}$

или: $^1/_4=^6/_{24}$ $^1/_6=^4/_{24}$ $^6/_{24}+^4/_{24}=^{10}/_{24}$

Можно ли $^1/_3$ и $^1/_5$ сложить въ десятыхъ доляхъ? Въ какихъ доляхъ можно сложить эти дроби? (Въ 15-хъ, въ 30-хъ и т. д.)

Если двѣ дроби, выраженныя въ разныхъ доляхъ, берутся на одной проволокѣ счетовъ, то какъ выразятся эти дроби при ихъ написаніи? (Дроби выражаются въ одинаковыхъ доляхъ, пишутся съ равными знаменателями.)

На 4-й, 6-й, 8-й и 16-й проволокахъ возьмите по одной долѣ фута; сосчитайте, сколько это составитъ вмѣстѣ.—На какой одной проволокѣ можно разомъ взять всѣ эти части?

$$\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{24}=\frac{6+4+3+1}{24}=\tfrac{14}{24}.\right)$$

На второй и на шестой проволокѣ возьмите по одной части фута, на 11-й три части и на 16-й 5 частей. Сколько это составитъ вмѣстѣ? Возьмите все разомъ на одной проволокѣ.

$$\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{3}{12}+\tfrac{5}{24}=\frac{12+4+6+5}{24}=1\tfrac{3}{24}.\right)$$

Возьмите на 11-й проволокѣ 7 частей ($\frac{7}{12}$) и на 6-й пять ($\frac{5}{6}$) Что больше и на сколько?

Въ какихъ доляхъ надо выразить дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{8}$, чтобы сложить ихъ вмѣстѣ?

$\frac{1}{5}=\frac{8}{40}$, то $\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$
$\frac{1}{8}=\frac{5}{40}$, то $\frac{3}{8}=\frac{15}{40}$ $\Big\}$ $\frac{24}{40}+\frac{15}{40}=\frac{39}{40}$.

Почему эти дроби не могутъ быть приведены къ знаменателю 24 30, 48?

Какое число надо искать для общаго знаменателя, когда мы желаемъ привести нѣсколько дробей къ общему знаменателю? (Число, дѣлящееся на всѣхъ знаменателей данныхъ дробей.)

Какого общаго знаменателя имѣютъ дроби: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{6}$? (18.)

А къ какому еще другому знаменателю, кромѣ 18, можно привести тѣ же дроби? (36, 54, 72, 90 и проч.)

Изъ всѣхъ чиселъ, дѣлящихся на знаменателей данныхъ дробей, какое слѣдуетъ выбирать и почему? (Наименьшее, потому что дроби выразятся тогда не въ слишкомъ мелкихъ доляхъ.)

При приведеніи дробей къ общему знаменателю ученикамъ помогаетъ обстоятельное знакомство съ числами первой сотни; а какъ въ этомъ курсѣ дробей общій знаменатель или не превышаетъ 100, или представляетъ число, о составѣ котораго ученики легко могутъ судить, напримѣръ: 120, 150, 200 и т. п., то это знаніе чиселъ первой сотни ученикамъ вполнѣ достаточно для рѣшенія всѣхъ задачъ изъ элементарнаго курса дробей.

Въ случаѣ затрудненія учениковъ при приведеніи данныхъ дробей къ общему знаменателю, они пользуются табличкой, въ которой одна и та же дробь выражается въ различныхъ доляхъ. Положимъ, требуется сложить дроби: $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$ и $\frac{4}{15}$.

Ученики составляютъ табличку:

$^1/_{12}={}^2/_{24}={}^3/_{36}={}^4/_{48}=({}^5/_{60})={}^6/_{72}={}^7/_{84}=\ldots$

$^1/_{10}={}^2/_{20}={}^3/_{30}={}^4/_{40}={}^5/_{50}=({}^6/_{60})$

$^1/_{15}={}^2/_{30}={}^3/_{45}=({}^4/_{60})$

Причемъ для второй дроби табличка пишется только до тѣхъ поръ, пока получатся доли, равныя тѣмъ, въ которыхъ выражается первая дробь, а для третьей до тѣхъ поръ, пока получатся доли, въ которыхъ выражаются разомъ первая и вторая дроби (въ нашемъ случаѣ 60-я); для этого иногда бываетъ необходимо продолжить табличку для первой и второй дроби.

Потомъ идетъ приведеніе данныхъ дробей къ найденному общему знаменателю и сложеніе:

$$\left.\begin{array}{l} ^1/_{12}={}^5/_{60},\ \text{то}\ {}^5/_{12}={}^{25}/_{60} \\ ^1/_{10}={}^6/_{60},\ \text{то}\ {}^3/_{10}={}^{18}/_{60} \\ ^1/_{15}={}^4/_{60},\ \text{то}\ {}^4/_{15}={}^{16}/_{60} \end{array}\right\}\ {}^{25}/_{60}+{}^{18}/_{60}+{}^{16}/_{60}={}^{59}/_{60}.$$

Съ очень слабыми учениками можно повести работу еще иначе, именно: сначала они составляютъ таблички для нѣсколькихъ данныхъ дробей, напримѣръ: $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$; а потомъ на основаніи этихъ табличекъ рѣшаютъ вопросы: „Сколько будетъ: $^1/_3+{}^1/_4$, $^1/_3+{}^1/_5$, $^3/_4+{}^2/_5$, $^2/_3+{}^1/_4+{}^3/_5$? Сколько будетъ: $^1/_3-{}^1/_5$, $^1/_3-{}^1/_4$?“ и др. Наконецъ, идетъ обобщеніе, что надо сдѣлать съ данными дробями для ихъ сложенія и вычитанія и какъ складывать и вычитать дроби, когда онѣ приведены къ общему знаменателю?

Способъ приведенія дробей къ общему знаменателю посредствомъ табличекъ, хотя и не основанъ на механизмѣ, все-таки можетъ быть употребляемъ только при работѣ съ слабѣйшими учениками; вообще же на основаніи обстоятельнаго изученія чиселъ первой сотни ученики должны сразу подыскивать общаго знаменателя данныхъ дробей.

(Устныя и письменныя задачи въ Сборникѣ на сложеніе и вычитаніе дробей отъ № 119 до № 157 и численные примѣры отъ № 157 до № 197.)

Задача устная. (Изъ Сборника № 127). Мастеръ сдѣлалъ по заказу серебряныя ложки изъ трехъ кусковъ серебра: въ $^1/_4$ фун., въ $^1/_6$ фун. и въ $^1/_8$ фун. Сколько денегъ получилъ онъ за всѣ ложки, если фунтъ серебра цѣнилъ въ 24 руб., да за всю работу взялъ 8 руб.?

Рѣшеніе: $^1/_4={}^6/_{24}$, $^1/_6={}^4/_{24}$, $^1/_8={}^3/_{24}$,
значитъ въ трехъ кускахъ было серебра $^6/_{24}+{}^4/_{24}+{}^3/_{24}={}^{13}/_{24}$ фун. Если фунтъ серебра стоитъ 24 руб., то $^1/_{24}$ фунта стоитъ 1 руб.,

$^{13}/_{24}$ фун. стоятъ 13 руб. Итакъ, мастеръ за серебро получилъ 13 рублей, да за работу 8 руб.; всего 21 рубль.

Задача письменная. (Изъ Сборника № 151). Крестьянинъ привезъ на рынокъ 5 чт. 7 $^{7}/_{9}$ чк. овса и продалъ одному покупателю $6^{7}/_{18}$ четверика овса, другому $5^{4}/_{15}$ чк. и третьему 5 $^{7}/_{10}$ чк. Сколько еще овса осталось у него?

Вычисленіе:

$^{1}/_{18}={}^{5}/_{90}$, то $^{7}/_{18}={}^{35}/_{90}$
$^{1}/_{15}={}^{6}/_{90}$; то $^{4}/_{15}={}^{24}/_{90}$
$^{1}/_{10}={}^{9}/_{90}$, то $^{7}/_{10}={}^{6}/_{90}$
$^{35}/_{90}+{}^{24}/_{90}+{}^{63}/_{90}={}^{122}/_{90}=1\,^{32}/_{90}=1^{16}/_{45}$
$6+5+5+1\,^{16}/_{45}=17^{16}/_{45}$
$17^{16}/_{45}$ четверика = 2 чт. $1^{16}/_{45}$ чк.
— 5 чт. $7^{7}/_{9}$ чк. ($^{35}/_{45}$)
2 чт. $1^{16}/_{45}$ чк.
3 чт. $6^{19}/_{45}$ чк.

Строчки.

Продано овса $6^{7}/_{16}+5^{4}/_{15}+5^{7}/_{10}=2$ чт. $1^{16}/_{45}$ чк.

Осталось овса (5 чт. $7^{7}/_{9}$ чк.) — (2 чт. $1^{16}/_{45}$ чк.) = 3 чт. $6^{19}/_{45}$ чк.

Выводы изъ этого отдѣла:

Какъ складываются и вычитаются дроби?

Какое число можетъ служить общимъ знаменателемъ для нѣсколькихъ данныхъ дробей?

Изъ всѣхъ чиселъ, дѣлящихся на знаменателей данныхъ дробей, какое нужно выбирать и почему?

Когда общій наименьшій знаменатель извѣстенъ, какъ приводить къ нему данныя дроби?

На какомъ свойствѣ дробей основано приведеніе ихъ къ общему знаменателю? (Отъ умноженія числителя и знаменателя дроби на одно и то же число величина ея не измѣняется.)

6) Нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей даннаго числа (умноженіе на дробь).

Послѣ достаточнаго ознакомленія учащихся при посредствѣ наглядныхъ пособій со свойствами дробей, дальнѣйшій курсъ ведется

прямо на рѣшеніи устныхъ и письменныхъ задачъ и на вычисленіи примѣровъ.

Въ этомъ и слѣдующихъ отдѣлахъ приходится умноженіе и дѣленіе на дробь, но безъ вывода правилъ этихъ дѣйствій съ дробями отвлеченными, а въ формѣ вопросовъ, относящихся къ отыскапію одной или нѣсколькихъ частей даннаго числа, нахожденію неизвѣстнаго числа по данной его части и опредѣленію содержанія дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ.

Планъ прохожденія всѣхъ трехъ слѣдующихъ отдѣловъ таковъ: для ознакомленія учениковъ съ задачами новаго рода имъ предлагаются вначалѣ задачи устныя, изъ рѣшенія которыхъ выводится общій пріемъ рѣшенія задачъ подобнаго рода. При этомъ, изъ нѣсколькихъ пріемовъ рѣшенія, предлагаемыхъ учениками, ими самими выбирается пріемъ простѣйшій. Потомъ уже пріемъ, установленный для рѣшенія устныхъ задачъ, прилагается и къ задачамъ письменнымъ, и къ численнымъ примѣрамъ.

Для поясненія плана я во всѣхъ трехъ отдѣлахъ привожу только образцы рѣшенія задачъ. (Въ Сборникѣ устныя и письменныя задачи на нахожденіе частей даннаго числа отъ № 197 до № 232 и численные примѣры отъ № 232 до № 252.)

1) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 200). Я купилъ комодъ за 36 руб.; черезъ нѣсколько времени долженъ былъ продать этотъ комодъ и получилъ за него только $^7/_{12}$ цѣны. Сколько рублей потерялъ я при этой продажѣ?

Рѣшеніе. Я купилъ комодъ за 36 рублей, а продалъ за $^7/_{12}$ цѣны; $^1/_{12}$ часть 36-ти руб. есть 3 руб., а $^7/_{12}$ въ 7 разъ болѣе, или 21 руб. Итакъ, я комодъ продалъ за 21 руб.; слѣдовательно потерялъ 36 руб.—21 руб. = 15 руб.

Или: я продалъ комодъ за $^7/_{12}$ своей цѣны, значитъ при этой продажѣ потерялъ $^{12}/_{12}—^7/_{12}=^5/_{12}$ всей цѣны, то-есть 36-ти рублей; а $^1/_{12}$ часть 36-ти руб. есть 3 руб., то $^5/_{12}$ въ 5 разъ болѣе, или 15 руб.

2) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 203). У меня было 4 руб. 80 коп.; $^1/_5$ часть всѣхъ этихъ денегъ я истратилъ на покупку географической карты, $^3/_{10}$ на книги и $^7/_{20}$ на письменныя принадлежности. Сколько денегъ у меня осталось?

Рѣшеніе. Всѣхъ денегъ у меня было 4 руб. 80 коп.; на покупку карты я истратилъ $^1/_5$ часть, то-есть 4 руб. 80 коп. : 5 = 96 коп. На покупку книгъ я истратилъ $^3/_{10}$ частей всѣхъ денегъ; $^1/_{10}$ часть

4 руб. 80 коп. есть 48 коп., а $^{3}/_{10}$ въ 3 раза болѣе, или 48 коп.$\times$3= =1 руб. 44 коп. На письменныя принадлежности я истратилъ $^{7}/_{20}$ частей 4 руб. 80 коп.; $^{1}/_{20}$ часть 4 руб. 80 коп. есть 24 коп., а $^{7}/_{20}$ въ 7 разъ болѣе, то-есть 24 коп.$\times$7=1 руб. 68 коп. Итакъ, всего я истратилъ: 96 коп.+1 руб. 44 коп.+1 руб. 68 коп.= =4 руб. 8 коп. Значитъ, у меня осталось денегъ 4 руб. 80 коп.— —4 руб. 8 коп.=72 коп.

Или: Изъ 4 руб. 80 коп. я истратилъ: $^{1}/_{5}$ часть, $^{3}/_{10}$ частей и $^{7}/_{20}$ частей, что составляетъ $^{4}/_{20}+^{6}/_{20}+^{7}/_{20}=^{17}/_{20}$ частей всѣхъ денегъ; значитъ, изъ всѣхъ денегъ осталось $^{20}/_{20}-^{17}/_{20}=^{3}/_{20}$ части. $^{1}/_{20}$ часть 4 руб. 80 коп. есть 24 коп., а $^{3}/_{20}$ въ 3 раза болѣе, или 24 коп.$\times$3=72 коп. Слѣдовательно, у меня осталось 72 коп.

Сличая два пріема рѣшенія послѣдней задачи, ученики убѣждаются въ томъ, что второй пріемъ—простѣйшій, и этотъ пріемъ примѣняютъ къ рѣшенію письменныхъ задачъ того же рода.

Задача. письменная. (Изъ Сборника № 219). Землекопы выкопали канаву, длиною въ 3 вер. 240 саж., въ 4 недѣли: въ первую недѣлю $^{2}/_{5}$ всей канавы, во вторую $^{1}/_{6}$, въ третью $^{3}/_{10}$, а въ четвертую недѣлю окончили всю работу. Сколько денегъ получили они за четвертую недѣлю, если съ сажени имъ платили по 15 коп.?

Вычисленіе.

$$^{2}/_{5}+^{1}/_{6}+^{3}/_{10}=^{12}/_{30}+^{5}/_{30}+^{9}/_{30}=^{26}/_{30}=^{13}/_{15}$$

$^{15}/_{15}-^{13}/_{15}=^{2}/_{15}$ 3 вер. 240 саж. = 1740 саж.

```
 1740 | 15         232
-15   |----       ×15
  24  | 116       ----
 -15  |  ×2       1160
  --  |----       232
  90  | 232       ----
 -90              3480
  --
  ””
```

Строчки.

Въ первыя 3 недѣли выкопано $^{2}/_{5}+^{1}/_{6}+^{3}/_{10}=^{13}/_{15}$ всей канавы.

Въ четвертую недѣлю выкопано $^{15}/_{15}-^{13}/_{15}=^{2}/_{15}$ всей канавы.

$^{1}/_{15}$ часть всей канавы=(3 вер. 240 саж.):15=116 саж.

$^{2}/_{15}$ „ „ „ =116 саж.$\times$2=232 саж.

За четвертую недѣлю получено 15 коп.$\times$232=34 руб. 80 коп.

Примѣчаніе. Въ строчки ученики вносятъ данныя въ задачѣ числа, или числа, получившіяся вмѣсто искомыхъ, и результаты вычисленій, но не вносятъ подробностей вычисленій.

Выводы:

Найти $^3/_5$ части отъ 15.
Узнать $^7/_{12}$ отъ 38.
Узнать $^5/_{16}$ отъ $^{24}/_{25}$.
Найти $^4/_9$ отъ $7^5/_8$.
Узнать $^5/_{14}$ отъ 72 сут. 18 час. 40 мин.
Найти $^4/_7$ отъ 17 саж. 2 арш. $9^3/_8$ вершка.

7) Нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ (дѣленіе на дробь).

(Устныя и письменныя задачи на нахожденіе цѣлаго по даннымъ его частямъ отъ № 252 до № 300 и численные примѣры отъ № 300 до № 315.)

1) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 253). Изъ $^1/_4$ всего купленнаго куска сукна портной сдѣлалъ 3 сюртука и на каждый сюртукъ употребилъ 2 арш. 12 вер. сукна. Сколько аршинъ сукна было въ цѣломъ кускѣ сукна?

Рѣшеніе. На каждый сюртукъ пошло 2 арш. 12 верш., то на 3 сюртука пошло (2 арш. 12 верш.) $\times 3 = 8$ арш. 4 верш. Эти 8 арш. 4 верш. составляютъ четверть всего куска сукна; значитъ, во всемъ кускѣ было сукна (8 арш. 4 верш.) $\times 4 = 33$ арш.

2) *Задача устная.* (Изъ Сборника № 258). Въ одной библіотекѣ русскія книги составляютъ $^3/_4$ всего числа книгъ, французскія $^1/_{10}$, нѣмецкія $^1/_{20}$, а всѣ остальныя 160 книгъ англійскія. Сколько всего книгъ въ этой библіотекѣ?

Рѣшеніе. Число всѣхъ книгъ, кромѣ англійскихъ, составляютъ $^3/_4 + {}^1/_{10} + {}^1/_{20} = {}^{18}/_{20}$ или $^9/_{10}$ всего числа книгъ въ библіотекѣ; значитъ, 160 англійскихъ книгъ составляютъ только $^1/_{10}$ часть всего числа книгъ; слѣдовательно, всего книгъ въ этой библіотекѣ $160 \times 10 = 1600$.

1) *Задача письменная.* (Изъ Сборника № 287). 4 крестьянина продали на рынкѣ рожь по 3 руб. 20 коп. за четверть; деньги, полученныя за всю эту рожь они раздѣлили между собою такъ, что одному досталось $^2/_{15}$ части всѣхъ этихъ денегъ, другому — $^7/_{20}$,

третьему—$^5/_{12}$, а четвертому—остальные 6 руб. 40 коп. Сколько четвертей ржи продали крестьяне?

Вычисленіе.

$$^2/_{15} + {^7/_{20}} + {^5/_{12}} = {^8/_{60}} + {^{21}/_{60}} + {^{25}/_{60}} = {^{54}/_{60}} = {^9/_{10}}$$

$$^{10}/_{10} - {^9/_{10}} = {^1/_{10}} \quad 640 \times 10 = 6400 \qquad 6400 : 320 = 20.$$

Строчки

Три крестьянина получили $^2/_{15} + {^7/_{20}} + {^5/_{12}} = {^9/_{10}}$ всѣхъ денегъ.

Четвертый получилъ $^{10}/_{10} - {^9/_{10}} = {^1/_{10}} = 6$ руб. 40 коп.

Вся рожь продана за (6 руб. 40 коп.) $\times 10 = 64$ руб.

Четвертей ржи было продано 64 руб. : (3 руб. 20 коп.) = 20.

2) *Задача письменная.* (Изъ Сборника № 295). Землекопы выкопали въ первый мѣсяцъ $^5/_{24}$ длины всего канала, во второй $^3/_{16}$, въ третій 126 саж. $2^3/_4$ арш. и въ четвертый остальныя $^5/_{12}$ части всего канала. Какъ велика длина всего канала?

Вычисленіе.

$$^5/_{24} + {^3/_{16}} + {^5/_{12}} = {^{10}/_{48}} + {^9/_{48}} + {^{20}/_{48}} = {^{39}/_{48}} = {^{13}/_{16}}$$

$^{16}/_{16} - {^{13}/_{16}} = {^3/_{16}}$ 126 саж. $2^3/_4$ арш. | 3

—12 | 42 саж. $^{11}/_{12}$ арш.

—„ „6 | $\times 16$

6 | 672 саж. $^{176}/_{12}$ арш.

„ $\quad 2^3/_4 = {^{11}/_4}$ | 1 вер. 176 саж. $2^2/_3$ арш.

Строчки.

Въ 1-ый, 2-ой и 4-ый мѣсяцъ выкопано $^5/_{24} + {^3/_{16}} + {^5/_{12}} = {^{13}/_{16}}$ канала.

Въ третій мѣсяцъ выкопано $^{16}/_{16} - {^{13}/_{16}} = {^3/_{16}} = 216$ саж. $2^3/_4$ арш.

$^1/_{16}$ часть канала = (126 саж. $2^3/_4$ арш.) : 3 = 42 саж. $^{11}/_{12}$ арш.

Длина всего канала = (42 саж. $^{11}/_{12}$ арш.) $\times 16 = 1$ вер. 176 саж. $2^2/_3$ арш.

Хорошимъ упражненіемъ въ концѣ этого отдѣла могутъ служить примѣры на отвлеченныя числа. По требованію учителя одинъ ученикъ задумываетъ какое-нибудь число, беретъ $^3/_5$ части этого числа и

результатъ говоритъ классу; товарищи его должны узнать задуманное число. Положимъ, что $^3/_5$ задуманнаго числа будетъ $12^1/_2$, значитъ, $^1/_5=12^1/_2:3=4^1/_6$, а все число$=4^1/_6\times5=20^5/_6$.

Выводы:

$^3/_5$ неизвѣстнаго числа$=18$. Узнать число.

Найти неизвѣстное число, если $^7/_{12}$ его частей$=^4/_9$.

$^4/_7$ неизвѣстнаго числа$=3^8/_{15}$. Узнать все число.

$^8/_{13}$ искомаго числа$=25$ пуд. 16 фун. $14^2/_3$ лота. Найти число.

8) Содержаніе дроби въ числѣ цѣломъ и дробномъ (дѣленіе на дробь).

(Устныя и письменныя задачи изъ Сборника отъ № 315 до № 339 и численные примѣры отъ № 339 до № 359).

Задача устная. (Изъ Сборника № 315). На сколько дней станетъ 10 мѣшковъ муки, въ каждомъ по 3 четверика, если въ день расходовать по $^2/_3$ четверика?

Рѣшеніе. Въ каждомъ мѣшкѣ муки было 3 четверика, то въ 10 мѣшкахъ было 30 четвериковъ. Если бы въ день выходило по 1 чк., то всей муки стало бы на 30 дней; если бы въ день выходило по $^1/_3$ чк., то муки стало бы на 90 дней, то-есть на число дней въ три раза большее 30-ти; а такъ какъ въ день выходитъ не по $^1/_3$, а по $^2/_3$ чк., то муки станетъ на $90:2=45$ дней.

Или: Муки было $3\times10=30$ чк.; чтобы узнать, на сколько дней станетъ этой муки, если въ день расходовать по $^2/_3$ чк., нужно узнать, сколько разъ $^2/_3$ содержится въ 30. Единица въ 30 содержится 30 разъ; $^1/_3$ будетъ содержаться въ три раза болѣе, то-есть $30\times3=90$ разъ, а $^2/_3$ въ два раза менѣе, нежели $^1/_3$, то-есть $90:2=45$ разъ. Значитъ, муки станетъ на 45 дней.

Или: Чтобы узнать, сколько разъ $^2/_3$ содержится въ 30, нужно узнать, сколько въ 30 единицахъ заключается третей единицы; $1=^3/_3$, то $30=^{90}/_3$, а $^2/_3$ въ $^{90}/_3$ содержится столько разъ, сколько разъ 2 содержится въ 90, то-есть 45 разъ.

Изъ приведенныхъ трехъ пріемовъ рѣшенія ученики останавливаются на послѣднемъ, какъ простѣйшемъ, и примѣняютъ его къ рѣшенію письменныхъ задачъ и вычисленію примѣровъ.

Задача письменная. (Изъ Сборника № 332). Всѣ конфекты, приготовленныя въ кондитерской въ продолженіи трехъ дней, разложили въ коробки; въ каждую коробку положили $3^3/_4$ фун. и каждую коробку про-

дали по 5 руб. 40 коп. Сколько денегъ получали за всѣ эти конфекты, если каждый день приготовляли $13^1/_8$ фун.?

Вычисленіе.

$13^1/_8 \times 3 = 39^3/_8$

$39^3/_8 : 3^3/_4 = {}^{315}/_8 : {}^{15}/_4 = {}^{315}/_8 : {}^{30}/_8 = 315 : 30 = 10^{15}/_{30} = 10^1/_2$

$540 \times 10 = 5400 \qquad 540 : 2 = 270$

$5400 + 270 = 5670.$

Строчки.

Въ три дня приготовили конфектъ $13^1/_8$ фун. $\times 3 = 39^3/_8$ фун.

Коробокъ вышло $39^3/_8 : 3^3/_4 = 10^1/_2$.

10 коробокъ продали за 5 руб. 40 коп. $\times$ 10=54 руб.

$^1/_2$ коробки „ „ 5 руб. 40 коп. : 2=2 руб. 70 коп.

За всѣ конфекты получили 54 руб. + 2 руб. 70 коп. = 56 руб. 70 коп.

Выводы.

Узнать, сколько разъ $^1/_6$ содержится въ 9.

Узнать, во сколько разъ 12 больше $^3/_8$.

Сколько разъ $^5/_{12}$ содержится въ 18?

Сколько разъ $^1/_5$ содержится въ $^9/_{20}$?

Сколько разъ $^3/_8$ содержится въ $^{27}/_{40}$?

Во сколько разъ $16^7/_8$ больше $2^3/_5$?

Узнать, сколько разъ 2 фун. $4^5/_8$ лота содержится въ 3 пудахъ 10 фун. $12^1/_2$ лот.

Для повторенія всего элементарнаго курса дробей въ „Сборникѣ“ имѣются смѣшанные задачи и численные примѣры (отъ № 359 до № 476) на всѣ дѣйствія.

Задача устная. (Изъ Сборника № 364). Въ 5 мѣшкахъ равнаго вѣса было $8^3/_4$ пуда орѣховъ; изъ одного мѣшка продано $^4/_7$ части всѣхъ орѣховъ по 15 коп. за фунтъ. Сколько денегъ получено за проданные орѣхи?

Рѣшеніе. Въ 5 мѣшкахъ было $8^3/_4$ пуда орѣховъ, то въ одномъ мѣшкѣ было $8^3/_4 : 5 = {}^{35}/_4 : 5 = {}^7/_4$ пуда. Изъ одного мѣшка продано $^4/_7$ части; $^1/_7$ часть $^7/_4$ пуда будетъ $^1/_4$ пуда, а $^4/_7$ части заключаютъ

$^1/_4 \times 4 = 1$ пудъ. Фунтъ орѣховъ продавался по 15 коп., то 1 пудъ, значитъ, проданъ за 15 коп. $\times 40 = 6$ руб.

Задача письменная. (Изъ Сборника № 374). Курьеръ отправился изъ одного города въ другой и въ каждые $2^1/_2$ часа дѣлалъ по $28^1/_3$ вер.; черезъ 15 часовъ послѣ своего выѣзда онъ разсчиталъ, что ему осталось еще сдѣлать $^2/_5$ всего разстоянія. Сколько всего верстъ долженъ былъ курьеръ проѣхать?

Вычисленіе.

$$28^1/_3 : 5 = 5^2/_3 \qquad 5^2/_3 \times 2 = 10^4/_3 = 11^1/_3$$
$$11^1/_3 \times 15 = 165^{15}/_3 = 170 \qquad ^5/_5 - ^2/_5 = ^3/_5$$
$$170 : 3 = 56^2/_3 \qquad 56^2/_3 \times 5 = 280^{10}/_3 = 283^1/_3.$$

Строчки.

Въ $^1/_2$ часа курьеръ проѣзжалъ $28^1/_3 : 5 = 5^2/_3$ вер.
Въ 1 часъ „ „ $5^2/_3 \times 2 = 11^1/_3$ „
Въ 15 часовъ курьеръ проѣхалъ $11^1/_3 \times 15 = 170$ вер.
Курьеръ проѣхалъ $^5/_5 - ^2/_5 = ^3/_5$ части всего разстоянія.
$^3/_5$ всего разстоянія $= 170$ вер.
$^1/_5$ „ „ $= 170 : 3 = 56^2/_3$ вер.
Все разстояніе $= 56^2/_3 \times 5 = 283^1/_3$ вер.

На этомъ, по моему мнѣнію, долженъ быть законченъ начальный курсъ Ариѳметики, проходимый въ три или четыре года. Пройдя тако- курсъ, ученикъ можетъ производить всѣ, даже весьма сложныя, вычисленія съ числами цѣлыми и дробями.

Въ народной школѣ, полный курсъ которой долженъ состоять въ изложенномъ начальномъ курсѣ, этотъ курсъ придется нѣсколько сократить, не по содержанію, а по количеству упражненій. Оканчивающій обученіе въ народной школѣ долженъ пріобрѣсть хорошій навыкъ и пріемъ въ вычисленіи съ числами цѣлыми любой величины и простѣйшими дробями; а потому, не имѣя въ виду на первомъ планѣ развитія учениковъ для прохожденія дальнѣйшаго гимназическаго обученія, не слѣдуетъ въ народной школѣ долго останавливаться на такомъ подробномъ изученіи чиселъ первой сотни, какъ это необходимо въ виду извѣстной подготовки ученика. Въ школѣ, въ которой обученіе продолжается только три года, достаточно на изученіе чиселъ первой сотни употребить одинъ первый годъ обученія; во второй годъ нужно пройти нумерацію и дѣйствія съ цѣлыми числами любой величины; въ третій—въ первое полугодіе элемен-

тарный курсъ дробей и во второе полугодіе повторять дѣйствія съ цѣлыми числами отвлеченными и именованными, если возможно, по самому краткому учебнику. Такимъ образомъ, самое главное, необходимое оканчивающему курсъ народной школы, будетъ хорошо усвоено и приведено окончательно въ систему. Если учившійся въ школѣ и позабудетъ впослѣдствіи что-либо изъ пройденнаго курса, то онъ вспомнитъ книжку, и легко при ея посредствѣ можетъ возстановить въ своей памяти забытое, обладая достаточнымъ развитіемъ сознанія, пріобрѣтеннымъ въ школѣ посредствомъ толковаго обученія.

Въ школѣ, гдѣ обученіе продолжается не менѣе четырехъ лѣтъ, изложенный начальный курсъ Ариометики можетъ быть пройденъ вполнѣ.

